UNIVERSITE DE MONS-HAINAUT
SERVICE DE LOGIQUE MATHEMATIQUE

Groupes définissables dans les structures o-minimales et groupes de Lie

Quentin Brouette

Année académique 2008-2009

Mémoire de Master dirigé par
Françoise Point
Rapporteurs : T. Brihaye, C. Michaux et C. Rivière

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement tous ceux qui m'ont aidé au cours de cette année à la réalisation de ce mémoire.

D'abord, Françoise Point qui l'a dirigé avec beaucoup d'énergie et de dévouement, ses excellents conseils furent toujours judicieux. Et Nathanaël Mariaule qui a fait partie de notre groupe de travail de théorie des modèles chaque vendredi.

Ensuite, Pierre-Emmanuel Caprace qui m'a appris à travailler avec les groupes topologiques.

Enfin, ma famille et mes amis sans qui ma vie n'aurait sans doute pas beaucoup de sens.

Table des matières

Introduction

A l'aube du vingtième siècle, David Hilbert posa les 23 problèmes célèbres qui portent son nom. Le cinquième de ces problèmes est de caractériser les groupes de Lie dans la catégorie des groupes localement compacts, et ce en évitant toute hypothèse de différentiabilité.

Plus de cinquante années furent nécessaires pour obtenir une réponse à cette question : dans [15], D. Montgomery et L. Zippin démontrèrent sur base d'un résultat de l'article [7] de A. Gleason, que tout groupe localement euclidien est un groupe de Lie.

A la fin des années 80, Anand Pillay montre dans [19] que tout groupe G définissable dans une structure o-minimale peut être muni d'une topologie qui en fait une variété définissable et un groupe topologique. Nous appellerons cette topologie la topologie t. En particulier, si la structure ambiante dans laquelle G est défini est $\mathbb{R}$, nous obtenons un groupe de Lie. De plus, il montre grâce à cette topologie que G a la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables.

Plus récemment, dans l'article [21], A. Pillay défini sur tout quotient de G par un sous-groupe type-définissable H une topologie qu'il appelle topologie logique. Les fermés de cette topologie sont les ensembles dont l'image réciproque par le quotient est type-définissable dans G. Dans ce même article, il énoncé une très jolie conjecture qui affirme entre autre que :

Soient $\mathcal{M}$ une structure o-minimale saturée et G un groupe définissable dans $\mathcal{M}$. Alors

(*i*) *G possède un plus petit sous-groupe type-définissable d'indice borné, G^{00}.*

(*ii*) *G/G^{00} muni de la topologie logique est un groupe de Lie compact.*

Il montre que l'existence de G^{00} est équivalente au fait que G/G^{00} soit un groupe de Lie. Ce morceau de la conjecture est donc équivalent à dire que tout groupe G définissable dans une structure o-minimale saturée a la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné. Dans [1], A. Berarducci, M. Otero, Y. Peterzil, et A. Pillay montrent que dans une structure o-minimale suffisamment saturée qui élimine les imaginaires, tout groupe définissable a cette condition de chaîne descendante.

La conjecture de Pillay est maintenant complètement résolue dans de nombreux cas particuliers, entre autre quand G est définissablement simple (et non commutatif) [21]. Mais aussi quand la structure ambiante $\mathcal{M}$ est une expansion o-minimale d'un corps réel clos.

Le but de ce mémoire est de parcourir le cheminement qui mène à prouver que G/G^{00} est un groupe de Lie compact.

Structure du mémoire.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions utiles à la compréhension du texte à savoir : types, saturation, élimination des imaginaires et cardinaux inaccessibles.

Le deuxième chapitre est une introduction à la o-minimalité. Après avoir défini les structures o-minimales, nous montrons que les ensembles définissables dans ces structures sont des unions disjointes de morceaux très simples appelés cellules, cela s'appelle le théorème de décomposition cellulaire. Nous définissons ensuite un opérateur de clôture sur les ensembles définissables, ce qui les munit d'une notion de dimension. Nous terminons le chapitre avec une notion o-minimale de caractéristique d'Euler.

Le troisième chapitre est complètement indépendant des autres, il ne parle pas du tout de théorie des modèles. On y introduit brièvement les groupes topologiques et groupes de Lie. Puis, nous enchaînons avec une caractérisation des groupes compacts, le résultat de ce travail étant que tout groupe compact est une limite projective de groupes de Lie compacts.

Dans le quatrième chapitre, nous nous replaçons définitivement dans le contexte des structures o-minimales. Nous y étudions les groupes définissables. Après avoir travaillé un peu sur leur dimension, nous les munissons d'une topologie qui en fait des groupes topologiques. Nous en déduisons que les groupes définissables ont la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables. Le chapitre se termine par un analogue o-minimal de la théorie des groupes de Sylow qui aboutit sur le fait que pour tout n, tout groupe définissable abélien a un nombre fini d'éléments de n torsion.

Le cinquième chapitre, est une étude des ensembles type-définissables ainsi que des quotients G/H où G est un groupe définissable et H est un sous-groupe normal type-définissable de G. Nous munissons de tels quotients d'une topologie que nous appelons topologie logique. Pour cette topologie tous les quotients G/H sont des groupes topologiques compacts. Ce chapitre est une préparation au chapitre suivant, il n'aboutit à aucun résultat d'importance particulière.

Enfin, un énoncé de la conjecture de Pillay est donné dans le dernier chapitre. Nous prouvons ensuite que tout groupe définissable dans une structure o-minimale saturée qui élimine les imaginaires a la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné. Ce résultat aboutit à l'existence de G^{00} et à une résolution partielle de la conjecture qui donna naissance à ce mémoire.

Chapitre 1

Préliminaires modèle-théoriques

Dans tout ce mémoire, nous aurons pour cadre la théorie des modèles du premier ordre. Une introduction à ce sujet est proposée par D. Marker dans [14]. Pour toute $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, nous noterons M le domaine de $\mathcal{M}$.

1.1 Saturation

Commençons par rappeler les notions de type (voir [9], paragraphe 6.3) et de saturation (voir [9], chapitre 10).

Définition 1.1.1. Soient T une $\mathcal{L}$-théorie (consistante) et $\bar{v}$ un n-uple de variables. Nous appelons n-type ou plus simplement type, un ensemble $\Sigma(\bar{v})$ de $\mathcal{L}$-formules (avec paramètres éventuels), avec variables libres parmi les éléments de $\bar{v}$ et consistant[1] avec T.

Nous dirons qu'un type $\Sigma(\bar{v})$ est complet si pour toute formule $\phi(\bar{v})$, nous avons soit $\phi(\bar{v}) \in \Sigma(\bar{v})$, soit $\neg\phi(\bar{v}) \in \Sigma(\bar{v})$.

Soient $\mathcal{M} \models T$ et $A \subset M$, nous noterons $S_n(A)$ l'ensemble des n-types complets dont toutes les formules sont à paramètres dans A. De plus, pour tout $\bar{a} \in M^n$, nous définissons le type de $\bar{a}$ sur A étant le n-type complet $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) := \{\phi(\bar{v}) : \phi(\bar{v})$ est à paramètres dans A et $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})\}$.

Définition 1.1.2. Soient κ un cardinal (infini) et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Nous dirons que $\mathcal{M}$ est κ-saturée ssi pour tout $A \subset M$ tel que $|A| < \kappa$ et tout $n \geq 1$, tout type de $S_n(A)$ est réalisé dans M.

[1]Nous dirons qu'un ensemble $\Sigma(\bar{v})$ de formules est consistant avec T s'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de T et un n-uple $\bar{a} \in M^n$ qui satisfait toutes les formules de $\Sigma(\bar{v})$.

Nous allons maintenant aborder quelques autres notions utiles.

Définition 1.1.3. Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux $\mathcal{L}$-structures. Nous dirons qu'une application $f : A \subset M_1 \to M_2$ est partielle élémentaire ssi pour toute formule $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ et pour tous $a_1, \ldots, a_m \in A$, $\mathcal{M}_1 \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \phi(f(\bar{a}))$.

Définition 1.1.4. Nous dirons qu'une structure $\mathcal{M}$ est κ-homogène ssi pour tous $A \subset M$, $|A| < \kappa$, $f : A \to M$ application partielle élémentaire et $a \in M$, il existe une application partielle élémentaire $f^* : A \cup \{a\} \to M$ telle que $f^* \supseteq f$.

Proposition 1.1.5. *Si $\mathcal{M}$ est κ-homogène, $A \subset M$, $|A| < \kappa$ et $f : A \to M$ est partielle élémentaire, alors il existe un automorphisme σ de $\mathcal{M}$ qui étend f. En particulier si $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$, et $tp(\bar{a}/\varnothing) = tp(\bar{b}/\varnothing)$, alors il existe un automorphisme σ de $\mathcal{M}$ tel que $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.*

Preuve. [14], proposition 4.2.13. □

Lemme 1.1.6. *Si $\mathcal{M}$ est κ-saturée, $\mathcal{M}$ est κ-homogène.*

Preuve. Soient $\mathcal{M}$ un modèle κ-saturé, $A \subset M$, $|A| < \kappa$ et $f : A \to M$ application partielle élémentaire. Soient $b \in M \setminus A$ et

$$\Gamma := \{\phi(v, f(\bar{a})) : \bar{a} \subset A \text{ et } \mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})\}.$$

Nous allons montrer que Γ est finiment consistant. Comme Γ est clos pas conjonction, il suffit de montrer que toutes les formules de Γ possèdent une réalisation dans $\mathcal{M}$. Si $\phi(v, f(\bar{a})) \in \Gamma$, alors $\mathcal{M} \models \exists v \phi(v, \bar{a})$ et comme f est partielle élémentaire $\mathcal{M} \models \exists v \phi(v, f(\bar{a}))$.

Puisque $\mathcal{M}$ est saturé, il existe une réalisation c de Γ appartenant à M. Par construction de c, $f \cup \{(b, c)\}$ est élémentaire, ce qui montre que $\mathcal{M}$ est κ-homogène. □

Nous aurons besoin plus tard de la proposition suivante tirée de [14].

Proposition 1.1.7. *Soient $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure κ-saturée et $A \subset M$ tel que $|A| < \kappa$. Si $X \subset M^n$ est un ensemble définissable avec paramètres dans M. Alors X est A-définissable ssi tous les automorphismes de $\mathcal{M}$ qui fixent A point par point fixent X globalement.*

Preuve. [$\Rightarrow$] Soient $X = \{\bar{b} \subset M : \mathcal{M} \models \phi(\bar{b}, \bar{a})\}$ où $\bar{a} \subset A$ et σ un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui fixe A point par point.

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \{\bar{c} \subset M : \mathcal{M} \models \phi(\sigma^{-1}(\bar{c}), \bar{a})\} \\ &= \{\bar{c} \subset M : \mathcal{M} \models \phi(\bar{c}, \sigma(\bar{a}))\} \text{ car } \sigma \text{ est un automorphisme} \\ &= \{\bar{c} \subset M : \mathcal{M} \models \phi(\bar{c}, \bar{a})\} \text{ car } \sigma(\bar{a}) = \bar{a} \\ &= X. \end{aligned}$$

[$\Leftarrow$] Soit $X = \{\bar{x} \subset M : \mathcal{M} \models \psi(\bar{x}, \bar{n})\}$ où $\bar{n} \subset \mathcal{M}$. Considérons l'ensemble de formules $\Gamma(\bar{v}, \bar{w}) :=$

$$\{\psi(\bar{v}, \bar{n}), \neg\psi(\bar{w}, \bar{n})\} \cup \{\phi(\bar{v}) \leftrightarrow \phi(\bar{w}) : \phi \text{ est une } \mathcal{L}_A\text{-formule }\}.$$

Nous noterons $\mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ le diagramme élémentaire[2] de $\mathcal{M}$. Supposons que $\Gamma \cup \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M})$ soit satifaisable. Par saturation de $\mathcal{M}$, nous pouvons trouver $(\bar{a}, \bar{b})$ une réalisation de Γ dans $\mathcal{M}$. Par construction de Γ, l'application f qui est l'identité sur A est qui envoie $\bar{a}$ sur $\bar{b}$ est élémentaire. Comme $\mathcal{M}$ est κ-saturée, $\mathcal{M}$ est κ-homogène (lemme 1.1.6) ce qui permet d'étendre f en un automorphisme σ de $\mathcal{M}$ (par la proposition 1.1.5). Comme $(\bar{a}, \bar{b})$ est une réalisation de Γ, $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, \bar{n}) \wedge \neg\psi(\bar{b}, \bar{n})$, ce qui est équivalent à dire que $\bar{a} \in X$ et $\sigma(\bar{a}) = b \notin X$ et contredit donc le fait que X soit fixé par σ. Cela montre que $\Gamma(\bar{v}, \bar{w})$ n'est pas satisfaisable dans $\mathcal{M}$.

Nous avons donc des $\mathcal{L}_A$-formules $\phi_1, \ldots, \phi_n$ telles que

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{v}\, \bar{w} \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (\phi_i(\bar{v}) \leftrightarrow \phi_i(\bar{w})) \to (\psi(\bar{v}, \bar{n}) \leftrightarrow \psi(\bar{w}, \bar{n})) \Big). \qquad \text{(E)}$$

Pour tout $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$, soit la $\mathcal{L}_A$-formule

$$\theta_\tau(\bar{v}) \equiv \bigwedge_{\tau(i)=1} \phi_i(\bar{v}) \wedge \bigwedge_{\tau(i)=0} \neg\phi_i(\bar{v}).$$

Si $\theta_\tau(\bar{a})$ et $\theta_\tau(\bar{b})$ alors, par (E), $\bar{a} \in X$ ssi $\bar{b} \in X$. Soit $S := \{\tau : \{1, \ldots, m\} \to \{0, 1\} : \mathcal{M} \models \theta_\tau(\bar{e}) \text{ pour un certain } \bar{e} \in X\}$, nous avons directement que

$$\bar{a} \in X \text{ ssi } \mathcal{M} \models \bigvee_{\tau \in S} \theta_\tau(\bar{v}).$$

Cela montre bien que X est A-définissable. $\square$

1.2 Elimination des imaginaires

Cette matière est exposée dans [9], paragraphe 4.4. Elle ne sera utile que dans le paragraphe 4.3 et le chapitre 6. Le lecteur qui le souhaite peut donc passer ce paragraphe et y revenir si besoin. Il est d'ailleurs conseillé à ceux qui ne sont pas familiers avec la o-minimalité (ou du moins les corps réels clos) de lire le début du chapitre 2 pour mieux comprendre la proposition 1.2.2 et le théorème 1.2.6.

Commençons par définir les fonctions de Skolem, nous ferons ensuite le lien entre cette notion et l'élimination des imaginaires.

[2]Le diagramme élémentaire de $\mathcal{M}$ est par définition l'ensemble $\{\phi(n_1, \ldots, n_k) : \mathcal{M} \models \phi(n_1, \ldots, n_k), \phi$ est une $\mathcal{L}$-formule et $n_i \in M\}$.

Définition 1.2.1. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie, nous dirons que T a des fonctions de Skolem définissable ssi pour toute formule $\phi(\bar{x}, y)$ où $\bar{x} := (x_1, \ldots, x_n)$, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi(\bar{x}, y)$ telle que

(i) $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y(\psi(\bar{x}, y) \rightarrow \phi(\bar{x}, y))$,

(ii) $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n(\exists y \phi(\bar{x}, y) \rightarrow \exists! y \psi(\bar{x}, y))$.

On peut alors définir une fonction F par la formule suivante :
$\forall \bar{x} \forall y(F(\bar{x}) = y \leftrightarrow (\exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge \psi(\bar{x}, y)) \vee (\neg \exists z \phi(\bar{x}, z) \wedge y = x_1))$.

Nous noterons ici, $Def_n(K)$ l'ensemble des sous-ensembles définissables de K^n (avec paramètres dans K).

Proposition 1.2.2. *Soit K un corps réel clos (ou plus généralement, une structure o-minimale*[3] *qui est une expansion d'un groupe $(G, <, +, 0, 1)$ ordonné, abélien, divisible et sans torsion) et $X \in Def_{m+n}(K)$. Alors il existe une fonction définissable $f : K^m \rightarrow K^n$ telle que pour tout $\bar{x} \in K^m$, s'il existe $\bar{y} \in K^n$ avec $(\bar{x}, \bar{y}) \in X$, alors $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in X$.*

De plus, si $X_{\bar{a}} := \{\bar{y} \in M^n : (\bar{a}, \bar{y}) \in X\} = X_{\bar{b}}$, alors $f(\bar{a}) = f(\bar{b})$.

Preuve. Nous allons procéder par induction sur n.

Si $n = 1$, on considère pour $\bar{a} \in K^m$, l'ensemble $X_{\bar{a}} := \{y \in M^n : (\bar{a}, y) \in X\}$. Par o-minimalité, ce sous-ensemble de K est une union finie d'intervalles ou de points. Si $X_{\bar{a}} = K$ ou $X_{\bar{a}} = \varnothing$, on pose $f(\bar{a}) = 0$. En supposant que $K \neq X_{\bar{a}} \neq \varnothing$, on envisage les cas suivants :

(a) S'il existe $c_0 \in K$ tel que $(-\infty, c_0) \subset X_{\bar{a}}$.
On considère alors l'élément c_0 maximal pour cette propriété, c'est-à-dire que $\forall x < c_0 (x \in X_{\bar{a}}) \wedge \forall y > c_0 \, \exists z \, (c_0 \leq z < y \wedge z \notin X_{\bar{a}})$. On pose, dans ce cas, $f(\bar{a}) = c_0 - 1$.

(b) Si $\neg$(a) et qu'il existe $c_1 \in K$ tel que $(c_1, +\infty) \subset X_{\bar{a}}$.
On considère c_1 minimal pour cette propriété et on pose $f(\bar{a}) = c_1 + 1$.

(c) Si $\neg$(a) et $\neg$(b) et s'il existe un intervalle $(c_2, c_3) \subset X_{\bar{a}}$.
Alors il existe $c_2, c_3 \in K$ minimaux, tels que $c_2 < c_3$ et $(c_2, c_3) \subset X_{\bar{a}}$ et et $\forall y_2 < c_2, \; \forall y_3 > c_3, \; \exists z_2 \exists z_3 (y_2 < z_2 < c_2) \wedge (c_3 < z_3 < y_3) \wedge (z_2 \notin X_{\bar{a}}) \wedge (z_3 \notin X_{\bar{a}})$.
On pose alors $f(\bar{a}) := (c_2 + c_3)/2$.

(d) Si $\neg$(a), $\neg$(b) et $\neg$(c).
$X_{\bar{a}}$ est alors un ensemble fini et on peut définir $f(\bar{a})$ étant le minimum de $X_{\bar{a}}$.

[3]Nous définirons la o-minimalité au début du chapitre 2. Nous verrons que les corps réels clos sont des structures o-minimales ainsi que les groupes ordonnés, abéliens, divisibles et sans torsion.

Passons de n à $n+1$. Soit $X \in Def_{m+n+1}(K)$. Par le cas de base de l'induction, il existe une fonction définissable $f_0 : K^{m+n} \to K$ telle que pour tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in K^{m+n}$, s'il existe $z \in K$ avec $(\bar{x}, \bar{y}, z) \in X$, alors $(\bar{x}, \bar{y}, f_0(\bar{x}, \bar{y})) \in X$. Ensuite, on considère la projection de X sur K^{m+n}, $\pi(X) := \{(\bar{x}, \bar{y}) \in K^{m+n} : \exists z\ (\bar{x}, \bar{y}, z) \in X\}$. Par hypothèse d'induction, il existe une fonction définissable $f_n : K^m \to K^n$ telle que $(\bar{x}, f_n(\bar{x})) \in \pi(X)$ dès que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \pi(X)$. Nous finissons donc la preuve en considérant la fonction $f : K^m \to K^{n+1}$ définie par $f(\bar{x}) := (f_n(\bar{x}), f_0(\bar{x}, f_n(\bar{x})))$. □

Définition 1.2.3. Une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{A}$ a l'élimination des imaginaires (e.i.) ou élimine les imaginaires ssi pour toute relation d'équivalence définissable $\theta(\bar{x}, \bar{y})$, et tout n-uple $\bar{a} \in A^n$, il existe une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ et un unique $\bar{b} \subset A$ tel que la classe d'équivalence de $\bar{a}$ soit de la forme $\phi(A^n, \bar{b})$. Autrement dit, il existe une fonction f définissable sans paramètres telle que

$$\forall \bar{a}_1, \bar{a}_2 (\theta(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \text{ ssi } f(\bar{a}_1) = f(\bar{a}_2)).$$

Nous dirons que $\mathcal{A}$ a l'élimination des imaginaires (e.i.) uniforme si la formule ϕ ne dépend que de θ et de A (ne dépend pas de $\bar{a}$).

Théorème 1.2.4. *Soit A une $\mathcal{L}$-structure. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{A}$ a l'e.i. uniforme

(ii) Pour toute formule $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, avec $\bar{x}$ de longueur n, il y a une formule $\chi(\bar{x}, \bar{z})$ telle que pour tout uple $\bar{a}$, il existe un unique uple $\bar{b}$ tel que $\psi(A^n, \bar{a}) = \chi(A^n, \bar{b})$.

Preuve. [⇒] Commençons par poser $\theta(\bar{y}, \bar{z}) \equiv \forall \bar{x}\ \psi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{z})$. Cela définit une relation d'équivalence et donc par (i), il existe une formule $\phi(\bar{y}, \bar{y}')$ telle que pour tout $\bar{a}$, il existe un unique $\bar{b}$ tel que $\theta(A^n, \bar{a}) = \phi(A^n, \bar{b})$. Nous posons enfin $\chi(\bar{x}, \bar{y}') \equiv \exists \bar{y}(\psi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \phi(\bar{y}, \bar{y}'))$.

Nous allons montrer que $\psi(A^n, \bar{a}) = \chi(A^n, \bar{b})$. Soit $\bar{e} \in A^n$ tel que $\psi(\bar{e}, \bar{a})$. Comme θ définit une relation d'équivalence, nous avons $\theta(\bar{a}, \bar{a})$, ce qui est équivalent à $\phi(\bar{a}, \bar{b})$. Nous avons donc $\psi(\bar{e}, \bar{a}) \wedge \phi(\bar{a}, \bar{b})$ ce qui implique $\chi(\bar{e}, \bar{b})$.

Réciproquement, si $\chi(\bar{e}, \bar{b})$, alors $\exists \bar{y}(\psi(\bar{e}, \bar{y}) \wedge \phi(\bar{y}, \bar{b}))$. De manière équivalente, $\exists \bar{y}(\psi(\bar{e}, \bar{y}) \wedge \theta(\bar{y}, \bar{a}))$. Par définition de θ, nous avons bien $\psi(\bar{e}, \bar{a})$.

[⇐] Est évident. □

Nous dirons que $\mathcal{A}$ a la 1-e.i. uniforme si $\mathcal{A}$ satisfait l'assertion (ii) du théorème 1.2.4 avec $n = 1$.

Lemme 1.2.5. *Si $\mathcal{A}$ a des fonctions de Skolem définissables et si $\mathcal{A}$ a la 1-e.i. uniforme, alors $\mathcal{A}$ a l'e.i. uniforme.*

Preuve. Soient $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ une relation d'équivalence sur A^n et $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in A^n$. Par 1-e.i., il existe une formule $\psi_0(x_0, \bar{z})$ et un unique $\bar{b}_0$ tel que

$$\psi_0(A, \bar{b}_0) = \{c : A \models \exists y_1, \ldots, \exists y_{n-1}\ \theta(\bar{a}, c, y_1, \ldots, y_{n-1})\}.$$

Comme $\mathcal{A}$ a des fonctions de Skolem définissables, il existe une fonction définissable f telle que $f(\bar{b}_0) = c \wedge \psi_0(c, \bar{b}_0)$. Par 1-e.i., il existe une formule $\psi_1(x_1, \bar{z})$ et un unique $\bar{b}_1$ tel que

$$\psi_1(A, \bar{b}_1) = \{c : A \models \exists y_2, \ldots, \exists y_{n-1}\ \theta(\bar{a}, f(\bar{b}_0), c, y_2, \ldots, y_{n-1})\}.$$

On itère jusqu'à obtention de formules $\psi_0(x_0, \bar{z}) \ldots \psi_{n-1}(x_{n-1}, \bar{z})$ et de uples $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n-1}$ tels que $\theta(\bar{a}, \bar{y}) \leftrightarrow \psi_0(y_0, \bar{b}_0) \wedge \cdots \wedge \psi_{n-1}(y_1, \bar{b}_{n-1})$. □

Théorème 1.2.6. *Tout corps réel clos K (plus généralement, toute structure o-minimale avec des fonctions de Skolem définissables dont le langage contient au moins deux symboles de constante) a l'e.i. uniforme.*

Preuve. Par la proposition 1.2.2, nous avons que K a des fonctions de Skolem définissables. Donc il suffit par le lemme 1.2.5 de montrer que K a la 1-e.i. uniforme.

Soit $\psi(x, \bar{a})$, on a que $\psi(A, \bar{a})$ est une union d'au plus k intervalles ouverts et de points, c'est-à-dire $\psi(A, \bar{a}) = \bigcup_{0 \leq i \leq k-1}(c_{2i}; c_{2i+1})$, où $c_0 \in K \cup \{-\infty\}$, $c_{2k-1} \in K \cup \{+\infty\}$ et $c_{2i} \leq c_{2i+1} \leq c_{2i+2}$ avec la convention que si $c_{2i} = c_{2i+1}$, l'intervalle $(c_{2i}; c_{2i+1})$ est un singleton, sinon il est ouvert. (Il ne faut pas perdre de vue que les c_l dépendent de $\bar{a}$.)

Nous allons exprimer $\psi(A, \bar{a})$, comme l'union d'intervalles $(c_{2i}; c_{2i+1})$ en s'assurant (pour avoir l'unicité) que ces intervalles sont maximaux. Cela revient à demander que les c_i soient les bords de $\psi(A, \bar{a})$. On peut définir les extrémités de ces intervalles par la formule suivante $\phi(\bar{c}) \equiv \bigwedge_{l=0}^{2k-1}$["tout intervalle contentant c_l intersecte $\bigcup_{0 \leq i \leq k-1}(c_{2i}; c_{2i+1})$ et $K \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq k-1}(c_{2i}; c_{2i+1})$"]. De plus, pour s'assurer de ne pas avoir deux intervalles identiques dans cette décomposition, il faut ajouter la formule
$\chi(\bar{c}) \equiv \bigwedge_{i,j=0,\ldots,k-1, i \neq j}(c_{2i} \neq c_{2j} \vee c_{2i+1} \neq c_{2j+1})$.

On a donc $\psi(x, \bar{z}) \leftrightarrow (x \in \bigcup_{0 \leq i \leq k-1}(c_{2i}; c_{2i+1})) \wedge \phi(\bar{c}) \wedge \chi(\bar{c})$. □

1.3 Cardinaux inaccessibles

Nous expliquons ici ce que sont les cardinaux inaccessibles et fortement inaccessibles. Cela apparaîtra dans la preuve du théorème 5.2.3.

Ces notions sont définies dans le livre de D. Marker [14], Appendice A pages 309 et 310.

Soit κ un cardinal non nul. Il existe un plus petit cardinal plus grand que κ, nous noterons ce cardinal κ^+. Nous dirons que κ est un successeur s'il existe un cardinal λ tel que $\kappa = \lambda^+$. Dans le cas contraire, nous dirons que κ est un cardinal limite.

Pour tout ordinal limite $\alpha \geq \omega$, la cofinalité de α est le plus petit cardinal λ tel qu'il existe une fonction $f : \lambda \to \alpha$ dont l'image $\mathrm{Im}(f)$ n'est pas bornée dans α. Nous noterons $\mathrm{cof}(\alpha)$ la cofinalité de α.

Nous dirons que κ est un cardinal régulier ssi $\kappa \geq \aleph_0$ et $\mathrm{cof}(\kappa) = \kappa$. Sinon, nous dirons que κ est un cardinal singulier.

Par exemple, $\aleph_0$ est un cardinal limite et régulier.

Nous dirons que κ est inaccessible si κ est un cardinal limite, régulier et que $\kappa > \aleph_0$. Dans ZFC (théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix), nous ne pouvons prouver ni l'existence, ni l'inexistence de tels cardinaux.

Nous dirons qu'un cardinal inaccessible κ est fortement inaccessible ssi pour tout $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$.

Chapitre 2

o-minimalité

Soit un langage $\mathcal{L} = \{<, \ldots\}$ où $<$ est un symbole de relation binaire. Nous dirons qu'une $\mathcal{L}$-structure du premier ordre $\mathcal{M}$ telle que $(M, <)$ soit un ordre total est o-minimale ssi tout sous-ensemble de M définissable (avec paramètres éventuels) dans le langage $\mathcal{L}$ est une union finie d'intervalles et de points. Dans ce texte, nous supposerons toujours que de plus $(M, <)$ est un ordre dense sans premier ni dernier élément.

Considérons donc une structure o-minimale $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$. Nous plaçons sur M la topologie donnée par les intervalles ouverts définis grâce à la relation d'ordre et sur chaque M^n, la topologie produit.

On notera $M_\infty := M \cup \{+\infty, -\infty\}$ et nous étendrons l'ordre défini sur M en posant $-\infty < a < +\infty$ pour tout $a \in M$.

Remarque 2.0.1. Sauf indication contraire, nous supposerons qu'un intervalle est un intervalle ouvert, c'est-à-dire un ensemble de la forme $(a, b) := \{x \in M : a < x < b\}$ où a et b sont dans M_∞.

Proposition 2.0.2 ([5], chapitre 1, proposition 4.2)**.** *Si $(G, <, ., \ldots)$ est une structure o-minimale telle que $(G, <, .)$ est un groupe ordonné, alors le groupe $(G, .)$ est abélien, divisible et sans torsion.*

Proposition 2.0.3 ([5], chapitre 1, proposition 4.6)**.** *Si $(A, <, +, ., \ldots)$ est une structure o-minimale et si de plus $(A, <, +, .)$ est un anneau ordonné* [1]*. Alors $(A, <, +, .)$ est un corps réel clos.*

Réciproquement, l'élimination des quantificateurs dans la théorie des groupes ordonnés, abéliens, divisibles et sans torsion et dans la théorie des corps réels clos permet de montrer que ces structures sont toujours o-minimales. Pour les corps réels clos, voir [14], théorème 3.3.15 et corollaire 3.3.23.

[1] Nous conviendrons que tout anneau est unitaire, c'est-à-dire qu'il contient un élément neutre pour la multiplication.

Exemple 2.0.4. Le corps réel clos $(\mathbb{R}, +, ., <, 0, 1)$ est une structure o-minimale. Si exp désigne la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, alors la structure $(\mathbb{R}, +, ., \exp, <, 0, 1)$ est également o-minimale. Ce résultat est dû à A. Wilkie [26].

L'expansion $(\mathbb{R}, +, ., <, 0, 1, \sin)$ n'est pas o-minimale car l'ensemble défini par la formule $\sin(x) = 0$ n'est pas une union finie d'intervalles ni de points.

Remarque 2.0.5. Soit $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure o-minimale, et $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_i : i \in I\}$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ des symboles de constante. On peut munir M d'une $\mathcal{L}'$-structure en interprétant tous les symboles de $\mathcal{L}$ comme dans $\mathcal{M}$. La structure $\mathcal{M}'$ ainsi obtenue est également o-minimale puisque les sous-ensembles de M qui sont $\mathcal{L}'$-définissables avec paramètres sont exactement ceux qui sont $\mathcal{L}$-définissables avec paramètres.

Le théorème de monotonicité décrit précisément les fonctions définissables $M \to M$. Ensuite, le théorème de décomposition cellulaire fournit une description des ensembles définissables dans M^n et des fonctions définissables $M^n \to M$. Des preuves de ces théorèmes sont données dans [5], l'objectif des deux premiers paragraphes est de donner les idées fondamentales de ces preuves.

Tout au long de ce chapitre, nous nous placerons dans $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure o-minimale.

2.1 Monotonicité

Théorème 2.1.1 (Monotonicité)**.** *Soient $a, b \in M_\infty$ et $f : (a, b) \to M$ définissable. Alors, il existe une suite strictement croissante $(a_i)_{i=0,\ldots,n+1} \subset M_\infty$ telle que $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$ et pour tout $i = 0, \ldots, n$, f est continue et strictement monotone ou constante sur (a_i, a_{i+1}).*

Esquisse de preuve. Soit $I := (a, b)$. On commence par prouver les trois assertions suivantes :

Fait 1. Il existe un sous-intervalle de I sur lequel f est soit constante, soit injective.

Fait 2. Si f est injective, f est strictement monotone sur un sous-intervalle de I.

Fait 3. Si f est strictement monotone, alors f est continue sur un sous-intervalle de I.

Pour prouver le théorème, on considère l'ensemble définissable $X := \{x \in I$: il existe un intervalle J contenant x, sur lequel la fonction f est soit constante, soit strictement monotone et continue$\}$. Par o-minimalité, si l'ensemble $I \setminus X$ est infini, il contient un intervalle et nous obtenons une contradiction en appliquant successivement les faits ci-dessus. L'ensemble $I \setminus X$ est donc fini. On peut alors se ramener au cas où $I = X$ (ce qui montre déjà la continuité de f). Quitte à encore décomposer l'intervalle I en sous-intervalles, nous pouvons envisager les 3 cas suivants :

- Pour tout $x \in (a, b)$, f est constante sur un voisinage de x,
- Pour tout $x \in (a, b)$, f est strictement croissante au voisinage de x,
- Pour tout $x \in (a, b)$, f est strictement décroissante au voisinage de x.

Dans chacun des cas, on montre respectivement que f est constante, strictement croissante et strictement décroissante sur I. Une preuve complète de ce théorème est donnée dans [5], chapitre 3, théorème 1.2. □

Corollaire 2.1.2. *Soit $f : (a, b) \to M$ fonction définissable, pour tout $c \in (a, b)$ les limites $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x)$ existent dans M_∞. Il en est de même pour les limites $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$ dans M_∞.*

Preuve. Par le théorème 2.1.1, on peut supposer sans perte de généralité que f est monotone et continue sur (a, b). Si f est constante, alors les quatre limites sont égales et prennent la valeur $f(x)$ pour un $x \in (a, b)$. Si f est strictement croissante sur (a, b), alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble définissable de M, et par o-minimalité, $\mathrm{Im}(f)$ possède un suprémum et un infimum dans M_∞.
On a donc que $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} f(x) = \sup(\mathrm{Im}(f \restriction_{(a,c)}))$, $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} f(x) = \inf(\mathrm{Im}(f \restriction_{(c,b)}))$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \sup(\mathrm{Im}(f))$ et $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \inf(\mathrm{Im}(f))$.
Si f est strictement décroissante, la preuve est similaire au cas précédent. □

Corollaire 2.1.3. *Soient $a, b \in M$ et $f : [a, b] \to M$ continue et définissable, f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.*

Preuve. Comme dans la preuve précédente, on suppose que f est monotone sur $[a, b]$. Si f est croissante sur $[a, b]$, le maximum (resp. minimum) de f est $f(b)$ (resp. $f(a)$). Sinon, le maximum (resp. minimum) de f est $f(a)$ (resp. $f(b)$). □

2.2 Décomposition cellulaire

Le fait topologique suivant sera utile à plusieurs reprises dans ce qui suit :

Fait. Soient $f, g, h : M^N \to M$ continues et telles que pour tout $x \in M^N$, $f(x) < g(x) < h(x)$. Soit $a \in M^N$ et $b := g(a) \in M$, alors il existe b_1, $b_2 \in M$ et un pavé $P \subset M^N$ tels que $b_1 < b < b_2$ et pour tout $x \in P$, $f(x) < b_1 < g(x) < b_2 < h(x)$.

Lemme 2.2.1 (Finitude uniforme)**.** *Soit $A \subset M^2$ définissable et supposons que pour tout $x \in M$ la fibre $A_x := \{y \in M : (x, y) \in A\}$ est finie, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in M$, $|A_x| \leqslant N$.*

Preuve. [5], chapitre 3, lemme 1.7. □

Notation. Soit $X \subset M^m$, on note $C(X) := \{f : X \to M$ où f est définissable et continue $\}$ et $C_\infty(X) := C(X) \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont considérés comme des fonctions constantes sur X. Pour f, g dans $C_\infty(X)$, on écrit $f < g$ si $\forall x \in X$, $f(x) < g(x)$ et dans ce cas $(f, g)_X := \{(x, r) \in X \times M : f(x) < r < g(x)\}$. Cet ensemble $(f, g)_X$ est inclus à M^{m+1} et sera parfois noté (f, g) si X est fixé par le contexte.

Définition 2.2.2. Soit $(i_1, \dots, i_m)$ une suite de zéros et de uns :

(i) une (0)-cellule est un singleton $\{r\} \subset M$; une (1)-cellule est un intervalle $(a, b) \subset M$,

(ii) on suppose que nous avons défini ce qu'est une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule, une $(i_1, \dots, i_m, 0)$-cellule est un graphe $\Gamma(f)$ pour $f \in C(X)$ et X une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule ; une $(i_1, \dots, i_m, 1)$-cellule est un ensemble $(f, g)_X$ où X est une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule, $f, g \in C_\infty(X)$ et $f < g$.

Une cellule dans M^m est une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule pour une certaine suite $(i_1, \dots, i_m) \in \{0, 1\}^m$.

Convention. Nous conviendrons que l'espace M^0 est lui même une cellule qui ne contient qu'un seul point, plus précisément une $(\cdot)$-cellule, où $(\cdot)$ désigne la suite de longueur zéro. Cette cellule est ouverte (et il n'existe pas d'autre $(\cdot)$-cellule).

Il est aisé de voir dans la définition de cellule que si C est une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule, $n \leq m$ et $\pi : M^m \to M^n$ désigne la projection sur les n premières composantes, alors $\pi(C)$ est une $(i_1, \dots, i_n)$-cellule.

Définition 2.2.3. Soit C une $(i_1, \dots, i_m)$-cellule, nous définissons la dimension de C par $\dim(C) := i_1 + \cdots + i_m$. Si A est un sous-ensemble définissable de M^m nous dirons que $\dim A := \max\{\dim(C) : C \subset A$ et C est une cellule$\}$.

Nous verrons plus tard (définition 2.4.6) une notion de dimension pour tous les ensembles définissables. Cette notion de dimension sera une généralisation de celle-ci (voir remarque 2.4.9).

Proposition 2.2.4. *Soit T un espace topologique et S un sous-ensemble de T. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout point $x \in S$, il existe un voisinage V de x dans T tel que $S \cap V$ est une partie fermée de V ;

(ii) S est un ouvert dans le sous-espace $\bar{S}$ de T ;

(iii) S est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de T.

Preuve. Voir [2], chapitre 1, page 20.

(i) $\to$ *(ii)* : Soit $x \in S$, il existe un voisinage V de x tel que $S \cap V$ est fermé dans V, donc $\bar{S} \cap V = S \cap V$. Cela implique que dans $\bar{S}$, le point x est un point intérieur de l'ensemble S. Puisque cette propriété est vraie pour tout $x \in S$, on conclut que S est ouvert dans $\bar{S}$.

(ii) $\to$ *(iii)* : si S est un ouvert dans $\bar{S}$, S est l'intersection d'un ouvert de T et de $\bar{S}$.

(iii) $\to$ *(i)* : Soient O un ouvert et F un fermé dans T, tels que $S = O \cap F$. Soit $x \in S$, nous avons bien évidemment que O est un voisinage de x dans T et que $O \cap S = O \cap F$ est fermé dans O. □

Définition 2.2.5. Un sous-ensemble S d'un espace topologique T est dit localement fermé s'il satisfait l'une des assertions équivalentes de la proposition précédente.

Exemple 2.2.6. Soit l'espace topologique $(\mathbb{R}, |.|)$ et le sous-ensemble $S := \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ de $\mathbb{R}$. $\bar{S} = \mathbb{R}$ et S n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$ car le point 0 n'est pas intérieur. L'ensemble S n'est donc pas localement fermé.

Remarque 2.2.7. Tout ensemble fermé est localement fermé. Mais tout ensemble localement fermé n'est pas nécessairement fermé, par exemple, tout ouvert dans l'espace $\mathbb{R}$ est localement fermé, car il est l'intersection de lui même avec $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.8. *Toute cellule est localement fermée.*

Preuve. Procédons par récurrence : pour les cellules de M^0, cela est évident. Soit C une cellule de M^{m+1} et $B := \pi(C)$ la projection de C dans M^m. On suppose par hypothèse d'induction que B est ouverte dans son adhérence $\bar{B}$, c'est-à-dire que $\bar{B} - B$ est fermé.
Si $C = \Gamma(f)$ (où $f : B \to M$ définissable et continue), alors $\bar{C} - C$ est contenu dans $(\bar{B} - B) \times M$ et C est ouvert dans le fermé $C \cup ((\bar{B} - B) \times M)$.
Si $C = (f, g)$ (avec $f, g : B \to M$ définissable, continue et $f < g$), alors $\bar{C} - C$ est contenu dans $\Gamma(f) \cup \Gamma(g) \cup ((\bar{B} - B) \times M)$ et C est ouvert dans le fermé $C \cup \Gamma(f) \cup \Gamma(g) \cup ((\bar{B} - B) \times M)$. □

Proposition 2.2.9. *Toute cellule est homéomorphe à une cellule ouverte (via une projection définissable).*

Preuve. Soit $i = (i_1, \dots, i_m) \in \{0,1\}^m$, on définit $p_i : M^m \to M^k$ (où $k = i_1 + \dots + i_m$). Soient $\lambda(1) < \dots < \lambda(k)$, les indices $\lambda \in \{1, \dots, m\}$ pour lesquels $i_\lambda = 1$, on définit la projection $p_i(x_1, \dots, x_m) := (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(k)})$. Pour A une i-cellule, nous allons montrer par récurrence sur m que p_i est un homéomorphisme de A dans $p_i(A) \subset M^k$ qui est une cellule ouverte.
Notation : $p_i\restriction_A : A \to p_i(A) : x \mapsto p_i(x)$.
Observation : Si A est ouverte, on a $p_i\restriction_A = id_A$.
Le cas de base de la récurrence est trivial en vertu de la convention ci-dessus.
Récurrence : Si A est une $(i_1, \dots, i_{m-1}, 1)$-cellule, $A = (f, g)_X$ et X est une cellule ouverte, par le fait topologique énoncé au début de ce paragraphe, A est ouverte.

Soient $i = (i_1, \dots, i_{m-1}, 0)$ et A une i-cellule, $A = \Gamma(f)$ où $f \in C(X)$ pour X une cellule de M^{m-1}. On définit $p : M^m \to M^{m-1} : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{m-1})$ et $p_A := p\restriction_A$ (on a donc que $X = p_A(A)$). Nous avons clairement que p_A est une bijection de A dans X.

- p_A est continue : soit $O \subset M^{m-1}$ un ouvert, $p_A^{-1}(O) \subset A$ et $p_A^{-1}(O) = p^{-1}(O) \cap A$ ouvert dans A (car $p^{-1}(O)$ est ouvert par continuité de p^{-1}).
- p_A^{-1} est continue : soit un ouvert de A, il est de la forme $O \cap A$ où O est un ouvert de M^m. Soit $x \in p_A(O \cap A)$, par continuité de f et par le fait topologique du début du paragraphe, on a un pavé $P \subset O$ qui contient le point $(x, f(x))$ et tel que $P \cap A = \Gamma(f\restriction_{p(P)})$. Par conséquent, $p_A(O \cap A) \supset p(P \cap A) = p(P) \cap X$ et $p(P) \cap X$ est un ouvert dans X qui contient x. Ce qui montre bien que $p_A(O \cap A)$ est ouvert et que p_A^{-1} est continue.

□

Définition 2.2.10. Nous dirons qu'un sous-ensemble définissable E de M^m est définissablement connexe (d.c.), s'il ne peut être écrit comme une union disjointe de deux ouverts définissables et non vides.

Exemple 2.2.11. Soit la structure o-minimale $(\mathbb{R}, +, ., <, (a)_{a \in \mathbb{Q}})$, corps ordonné des nombres réels muni de symboles de constante interprétés par les rationnels. Il est clair que $\mathbb{R}$ est connexe et donc d.c.. L'ensemble $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ n'est pas d.c. (et donc n'est pas connexe). On peut montrer que dans le cadre où $\mathcal{M}$ est une expansion o-minimale de $(\mathbb{R}, <)$ que la notion de connexité définissable est équivalente à la connexité usuelle.

Proposition 2.2.12. *Toute cellule est définissablement connexe. En particulier, tout pavé est définissablement connexe.*

Preuve. Par récurrence sur la dimension m de l'espace dans lequel la cellule est définie :

- Si $m = 0$, l'unique cellule à considérer est un singleton (qui est forcément d.c.).
- Si $m = 1$, toute cellule est une singleton (qui est donc d.c.) ou un intervalle. Supposons que cet intervalle I ne soit pas d.c., $I = O_1 \cup O_2$ où O_i sont des ouverts définissables disjoints. Chacun de ces ouverts est une union disjointe d'intervalles ouverts : $I = I_1 \cup \cdots \cup I_n (n \geq 1)$, $I_i = (a_i, b_i)$ où $b_i \leq a_{i+1}$. Comme $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, $b_1 \leq a_2$, par conséquent $b_1 \notin I_1 \cup \cdots \cup I_n$ et donc $b_1 \notin I$, ce qui est absurde.
- Supposons que la propriété soit vraie pour toute cellule dans M^m. Soit $A \subset M^{m+1}$, une cellule et $\pi : M^m + 1 \to M^m : (x_1, \ldots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$. Par hypothèse de récurrence, la projection $\pi(A)$ est d.c. et chaque fibre $A_x := \pi^{-1}(x) \cap A$ est d.c. (car c'est une cellule de M). Par l'absurde, supposons que A soit l'union disjointe de deux ouverts O_1 et O_2 (non vides et définissables).

  Cas 1 : Si une des fibres A_x est telle que $A_x \cap O_1 \neq \varnothing \neq A_x \cap O_2$, cela contredit le fait que A_x soit d.c. car $A_x \cap O_1$ et $A_x \cap O_2$ sont des ouverts dans A_x qui sont définissables et disjoints.

  Cas 2 : Aucune des fibres A_x n'a cette propriété, i.e. pour tout $x \in M$, $A_x \cap O_1 = \varnothing$ ou $A_x \cap O_2 = \varnothing$. Alors, on a clairement que les projections $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$ sont des ouverts disjoints et définissables dans $\pi(A)$ [2]. Comme O_1 et O_2 sont non vides, $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$ sont non vides, ce qui contredit le fait que $\pi(A)$ soit d.c..

□

Les cellules ouvertes dans l'espace M^m sont exactement les $(1, \ldots, 1)$-cellules.

Définition 2.2.13. Une décomposition de M^m est une partition de M^m en un nombre fini de cellules qui satisfont :

(i) Une décomposition de $M^1 = M$ est une collection $\{(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_k, +\infty), \{a_1\}, \{a_k\}\}$ où $a_1 < \cdots < a_k$;

(ii) Une décomposition de M^{m+1} est une partition finie de M^{m+1} en cellules A telle que l'ensemble des projections $\pi(A)$ ($\pi : M^{m+1} \to M^m$) est une décomposition de M^m.

---

[2]Les ensembles O_1 et O_2 ne sont pas nécessairement ouverts dans M^{m+1}, ils ne le sont que dans la cellule A. Le fait que leurs projections soient ouvertes découle de la continuité des fonctions qui définissent A à partir de $\pi(A)$ et du fait qui entame ce paragraphe.

Soit $\mathcal{D} := \{A(1), \ldots, A(k)\}$ une décomposition de M^m telle que $A(i) \neq A(j)$ si $i \neq j$ et soient pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ les fonctions $f_{i1}, \ldots, f_{in(i)} \in C(A(i))$ avec $f_{i1} < \cdots < f_{in(i)}$. Alors $\mathcal{D}_i$ est une partition de $A(i) \times M$. On peut facilement montrer que $\mathcal{D}^* := \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_k$ est une décomposition de M^{m+1} et que toute décomposition de M^{m+1} découle de cette manière d'une décomposition $\mathcal{D}$ de M^m. On écrira $\mathcal{D} = \pi(\mathcal{D}^*)$.

Une décomposition $\mathcal{D}$ de M^m est dite partition de $S \subset M^m$ si toute cellule de $\mathcal{D}$ est soit incluse à S ou disjointe de S, autrement dit, S est une union de cellules de $\mathcal{D}$.

Théorème 2.2.14 (Décomposition cellulaire)**.** *Soient $A_1, \ldots A_k$ des sous-ensembles définissables de M^m, $A \subset M^m$ et $f : A \to M$ une fonction définissable.*

(I$_m$) *Il existe une décomposition de M^m qui partitionne tous les A_i (où $i = 1, \ldots, k$).*

(II$_m$) *Il existe une décomposition $\mathcal{D}$ de M^m qui partitionne A et telle que pour tout $B \in \mathcal{D}$ (et $B \subset A$), $f\restriction_B$ est continue sur B.*

Preuve. Nous allons procéder par induction sur m. (I$_1$) et (II$_1$) découlent respectivement de la o-minimalité de $\mathcal{M}$ et du théorème de monotonicité. Supposons maintenant que pour tout $i \leq m$, les propriétés (I$_m$) et (II$_m$) sont satisfaites.

Nous allons commencer par généraliser le lemme 2.2.1. Soit $Y \subseteq M^{m+1}$, nous dirons que Y est fini sur M^m si pour tout $x \in M^m$, la fibre $Y_x := \{r \in M : (x, r) \in Y\}$ est finie. Si de plus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in M^m$, $|Y_x| \leq N$, nous dirons que Y est uniformément fini sur M^m.

Lemme 2.2.15 (Propriété de finitude uniforme généralisée)**.** *Soit un ensemble définissable $Y \subseteq M^{m+1}$. Si Y est fini sur M^m, alors Y est uniformément fini sur M^m.*

Preuve. Une démonstration complète est donnée dans [5], chapitre 3, lemme 2.13, elle utilise entre autre les hypothèses de récurrence (I$_m$) et (II$_m$). □

Nous allons maintenant nous préparer à la preuve de (I$_{m+1}$). Soit $A \subset M$, on définit $bd(A) := \{x \in M :$ tout intervalle qui contient x intersecte A et $M - A\}$. Par o-minimalité, cet ensemble est fini. Si $a_0 = -\infty$, $a_1 < \cdots < a_k$ sont les éléments de $bd(A)$ et $a_{k+1} = +\infty$, tous les intervalles (a_i, a_{i+1}) sont soit inclus à A, soit disjoints de A. Pour $A \subset M^{m+1}$, $bd_m(A) := \{(x, r) \in M^{m+1} : r \in bd(A_x)\}$. Cet ensemble est fini sur M^m et par le lemme 2.2.15, nous savons qu'il est uniformément fini sur M^m.

Preuve de (I$_{m+1}$) : Soient $A_1, \ldots, A_k \subset M^{m+1}$ ensembles définissables et $Y := bd_m(A_1) \cup \cdots \cup bd_m(A_k)$. L'ensemble $Y \subset M^{m+1}$ est définissable et fini

sur M^m. Par le lemme 2.2.15, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in M^m$, $|Y_x| \leq N$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, soient $B_i := \{x \in M^m : |Y_x| = i\}$ et $f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{ii} : B_i \to M$ telles que $Y_x = \{f_{i1}(x), \ldots, f_{ii}(x)\}$ et $f_{ik} < f_{ik+1}$. Posons également, $f_{i0} := -\infty$ et $f_{ii+1} := +\infty$. Pour tous $\lambda \in \{1, \ldots, k\}$, $i \in \{0, \ldots, N\}$, $1 \leq j \leq i$, $C_{\lambda ij} := \{x \in B_i : f_{ij}(x) \in (A_\lambda)_x\}$ et pour $0 \leq j \leq i$, $D_{\lambda ij} := \{x \in B_i : (f_{ij}(x), f_{ij+1}(x)) \subset (A_\lambda)_x\}$. Par ($\mathrm{I}_m$) et ($\mathrm{II}_m$) appliqués successivement et à plusieurs reprise, on peut trouver une décomposition $\mathcal{D}$ de M^m qui partitionne à la fois les B_i, les $C_{\lambda ij}$, les $D_{\lambda ij}$ et qui a aussi la propriété que si $E \in \mathcal{D}$ est contenu dans B_i, alors $f_{i1}\restriction_E, \ldots, f_{ii}\restriction_E$ sont continues. Ensuite, pour toute cellule $E \in \mathcal{D}$, on construit une partition $\mathcal{D}_E$ de $E \times M$ en cellules :
$\mathcal{D}_E := \{(f_{i0}\restriction_E, f_{i1}\restriction_E), \ldots, (f_{ii}\restriction_E, f_{ii+1}\restriction_E), \Gamma(f_{i1}\restriction_E), \ldots, \Gamma(f_{ii}\restriction_E) : i \in \{0, \ldots, N\}$ et $E \subset B_i\}$. Enfin, l'union $\mathcal{D}^* := \bigcup_{E \in \mathcal{D}} \mathcal{D}_E$ est une décomposition de M^{m+1} qui partitionne tous les $A_1, \ldots, A_k$, ce qui prouve bien (I_{m+1}).

Lemme 2.2.16. *Soient X un espace topologique, $(M_1, <)$, $(M_2, <)$ des ordres denses sans premier ni dernier élément et $f : X \times M_1 \to M_2$ une fonction telle que pour tout $(x, r) \in X \times M_1$:*

(i) $f(x, \cdot) : M_1 \to M_2$ est continue et monotone sur M_1 ;

(ii) $f(\cdot, r) : X \to M_2$ est continue en x,

f est continue.

Preuve de (II_{m+1}) : Soient $A \subset M^{m+1}$ et $f : A \to M$ une fonction définissable. Nous allons décomposer A en cellules sur lesquelles f est continue. En vertu de (I_m), il nous suffira de trouver des ensembles définissables $A_1, \ldots, A_k \subset M^m$ tels que pour tous $i = 1, \ldots, k$, $f\restriction_{A_i}: A_i \to M$ est continue et $A := A_1 \cup \cdots \cup A_k$. De plus, toujours grâce à (I_m), nous pouvons sans perte de généralité, supposer que A est une cellule.

Si A n'est pas ouverte, nous savons qu'il existe un homéomorphisme définissable $p_A : A \to p(A)$ où $p(A) \subset M^n$ pour $n < m$ est une cellule. Par (II_n), nous pouvons partitionner $p(A)$ en $B_1, \ldots, B_k$ tels que pour tout j, $(f \circ p_A^{-1})\restriction_{B_j}$ est continu. On en déduit que A est partitionné en $p_A^{-1}(B_1), \ldots, p_A^{-1}(B_k)$ et la restriction de f à chaque $p_A^{-1}(B_i)$ est continue.

Si A est une cellule ouverte, on dira que f est bienfaitrice en $(p, r) \in A$ s'il existe un pavé $C \ni p$ et un intervalle $(a, b) \ni r$ tels que :

(i) $C \times (a, b) \subset A$;

(ii) $\forall x \in C$, $f(x, \cdot)$ est continue et monotone sur (a, b) ;

(iii) $f(\cdot, r)$ est continue en p.

Soit l'ensemble $A^* := \{(p, r) \in A$ tels que f est bienfaitrice en $(p, r)\}$, cet ensemble est définissable et de plus :

Lemme 2.2.17. *A^* est dense dans A.*

Preuve. Soit un pavé $B \subset M^m$ et $-\infty < a < c < +\infty$, nous allons montrer que $B \times (a, c) \cap A^* \neq \varnothing$. Par le théorème de monotonicité, pour tout $x \in B$, il existe un $\lambda(x) \in (a, c]$ maximal tel que $f(x, \cdot)$ est continue et monotone sur $(a, \lambda(x))$. On obtient donc une fonction définissable $\lambda : B \to M$ et par (II_m), on a un pavé $C \subset B$ tel que λ est continue sur C. Par continuité, on peut trouver $b \in (a, c)$ et un pavé $C' \subset C$ tels que pour tout $x \in C'$, $b \leq \lambda(x)$. On prend ensuite un élément quelconque $r \in (a, b)$ (le choix de cet élément importe peu). La fonction $f(\cdot, r) : C' \to M$ est définissable et par (II_m), $f(\cdot, r)$ est continue sur un pavé $C_r \subset C$. f est donc bienfaitrice en tout point (p, r) où $p \in C_r$ (et souvenons-nous que $r \in (a, b)$). □

On construit à l'aide de (I_{m+1}) une décomposition $\mathcal{D}$ de M^{m+1} qui partitionne A et A^*. Soit $D \in \mathcal{D}$ une cellule ouverte telle que $D \subset A$ (pour les autres cellules, on peut utiliser l'hypothèse d'induction comme précédemment), par densité de A^* dans A, $D \cap A^* \neq \varnothing$ et par définition de décomposition, $D \subset A^*$. Par le lemme 2.2.16, pour tout $(p, r) \in D$, f est continue en (p, r) (car D est ouvert). Cela termine la preuve de (II_{m+1}) et ainsi celle du théorème. □

Il est intéressant de remarquer que la décomposition cellulaire construite dans la preuve de ce théorème n'a rien d'unique, par ailleurs, si un ensemble $A \subset M^m$ est définissable sur un ensemble P de paramètres, alors les cellules qui servent à le décomposer sont définissables sur ce même ensemble de paramètres P.

Corollaire 2.2.18. *Soient $A \subset M^n$ et $f : A \to M^m$ définissable alors il existe une décomposition $\mathcal{D}$ de M^n qui partitionne A et telle que pour tout $B \in \mathcal{D}$, f est continue sur B.*

Preuve. Soient les fonctions $f_i : A \to M$ telles que $f = (f_1, \ldots, f_m)$, on applique le théorème de décomposition cellulaire à chacune des fonctions f_i et on obtient une famille de décompositions $\mathcal{D}_i$ de M^n et telle que pour tout $B \in \mathcal{D}_i$ (avec $B \subset A$), $f_i\restriction_B$ est continue sur B. A nouveau par le théorème de décomposition cellulaire (première partie), on construit une partition $\mathcal{D}$ de M^n qui partitionne simultanément tous les éléments de toutes les décompositions $\mathcal{D}_i$. Sur chaque $B \in \mathcal{D}$ (avec $B \subset A$), toutes les f_i sont continues et f est donc continue. □

Corollaire 2.2.19 ([11], théorème 0.2)**.** *Soit $\mathcal{N}$ une $\mathcal{L}$-structure élémentairement équivalente à $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{N}$ est o-minimale.*

2.3 Clôture définissable

Nous travaillons toujours dans une structure o-minimale $\mathcal{M}$. Soit A un sous-ensemble de M, on définit la clôture définissable de A et on note $dcl(A)$ l'ensemble $\{a \in M$: il existe une formule $\phi(x, \bar{a})$ dont les paramètres $\bar{a} \in A$ et telle que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{a}) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{a}) \Rightarrow x = a)\}$. La clôture définissable de A est donc l'ensemble des éléments de M qui sont l'unique réalisation dans M d'une formule à paramètre dans A. Nous allons commencer par montrer que dcl satisfait les propriétés suivantes :

Lemme 2.3.1. *Soient $A \subset B \subset M$, $A \subset dcl(A) \subset dcl(B)$.*

Preuve. Soit $a \in A$, a est l'unique réalisation de la formule $\phi(x) \equiv x = a$ dont l'unique paramètre est $a \in A$. De plus, si $e \in dcl(A)$, on peut trouver une formule $\phi(x, \bar{a})$ dont les paramètres $\bar{a} \in A$ et telle que $\mathcal{M} \models \phi(e, \bar{a}) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{a}) \Rightarrow x = e)$. La formule $\phi(x, \bar{a})$ étant à paramètres dans A, elle est en particulier à paramètres dans B, ce qui montre que $e \in dcl(B)$. □

Lemme 2.3.2. *Soit $A \subset M$, $dcl(dcl(A)) = dcl(A)$.*

Preuve. Pour alléger la notation, nous écrirons $\exists! y\phi(y, \bar{a})$ pour $\exists y\phi(y, \bar{a}) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{a}) \Rightarrow x = y)$. Par le lemme précédent (appliqué deux fois), $A \subset dcl(A)$, donc $dcl(A) \subset dcl(dcl(A))$. Soit maintenant $e \in dcl(dcl(A))$, il existe $\phi(x, \bar{b})$ telle que $b_1, \ldots, b_n \in dcl(A)$ et

$$\mathcal{M} \models \phi(e, \bar{b}) \wedge \exists! y\phi(y, \bar{b}).$$

Comme $b_1, \ldots, b_n \in dcl(A)$, il existe pour tout i une formule $\psi_i(x, a_{i1}, \ldots, a_{ip})$ telle que $a_{ij} \in A$ pour tout $j = 1, \ldots, p$ et

$$\mathcal{M} \models \psi_i(b_i, a_{i1}, \ldots, a_{ip}) \wedge \exists! y\psi_i(y, a_{i1}, \ldots, a_{ip}).$$

Soit la formule $\chi(x, a_{ij} : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p) \equiv$

$$\exists y_1, \ldots, y_n\, \phi(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge \bigwedge_{i=1,\ldots,n} \psi_i(y_i, a_{i1}, \ldots, a_{ip}).$$

Chaque variable y_i n'aura qu'une valeur possible à savoir b_i. Par conséquent, $\mathcal{M} \models \chi(e, \bar{a}) \wedge \exists! y\, \chi(y, \bar{a})$. □

Lemme 2.3.3 (Propriété d'échange de Steinitz)**.** *Si $a \in dcl(A \cup b)$ et $a \notin dcl(A)$, alors $b \in dcl(A \cup a)$.*

Preuve. Soit un élément $a \in dcl(A \cup b) - dcl(A)$, par définition, nous avons $\bar{a} \in A$ et une formule $\phi(x, \bar{a}, y)$ telle que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{a}, b) \wedge \forall x(\phi(x, \bar{a}, b) \Rightarrow x = a)$. Soit l'ensemble $E = \{y \in M : \mathcal{M} \models \exists^{=1} x\ \phi(x, \bar{a}, y)\}$. E est A-définissable et contient b. Soit la fonction A-définissable $f : E \to M : y \mapsto f(y)$ définie par la condition $x = f(y) \Leftrightarrow \phi(x, \bar{a}, y)$. Par le théorème de monotonicité 2.1.1, on peut partitionner E en un nombre fini d'intervalles ou de singletons I_i tels que pour tout i, f est soit constante soit strictement monotone (et donc dans ce cas injective sur I_i). De plus, les ensembles I_i sont A-définissables. Soit $I := I_j$ tel que $b \in I_j$. Nous pouvons déjà dire que si I est un singleton, $I = \{b\}$ et donc $b \in dcl(A)$ puisque I est A-définissable. Si au contraire, I est un intervalle, nous allons envisager deux cas :
<u>Si $\forall x, y \in I\ f(x) = f(y)$</u> : Comme $a = f(b)$, on a $f(I) = \{a\}$. Soit la formule $\forall u \in I\ f(u) = z$ que nous dénoterons par $\psi(z)$. Cette formule a tous ses paramètres dans A et $\mathcal{M} \models \psi(a)$, ce qui contredit le fait que $a \notin dcl(A)$.
<u>Si $\forall x, y \in I\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$</u> : Nous avons toujours $f(b) = a$. La formule $\phi(a, \bar{a}, y) \wedge y \in I$ est à paramètres dans $A \cup a$ et b est le seul élément de M tel que $\mathcal{M} \models \psi(\cdot)$ ce qui montre que $b \in dcl(A \cup a)$. □

Ces trois lemmes montrent que de la clôture dcl sur M^k induit une relation de dépendance au sens de Cohn [3], chapitre 1 : nous dirons que $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ est dépendant sur A s'il existe $x_i \in \bar{x}$ tel que $x_i \in dcl(A \cup \bar{x} \setminus \{x_i\})$.

Nous allons maintenant définir une autre clôture que nous appellerons la clôture algébrique et que nous noterons acl : $acl(A) := \{a \in M :$ il existe une formule $\phi(x, \bar{a})$ dont les paramètres $\bar{a} \in A$ et telle que $\mathcal{M} \models \phi(a, \bar{a}) \wedge \exists y_1, \ldots, y_n \forall x(\phi(x, \bar{a}) \Rightarrow x = y_1 \vee \cdots \vee x = y_n)\}$. Autrement dit, la clôture algébrique de A est l'ensemble des éléments de M qui sont la réalisation dans M d'une formule à paramètre dans A qui n'a dans M qu'un nombre fini d'autres réalisations.

Lemme 2.3.4. *Soit $A \subset M$, $acl(A) = dcl(A)$.*

Preuve. Il est immédiat vu les définitions que $dcl(A) \subset acl(A)$.

L'autre inclusion découle de la présence du symbole $<$ dans le langage. Soit $a \in acl(A)$, nous avons une formule $\phi(x, \bar{a})$ dont les paramètres $\bar{a} \in A$ et dont $y_1 < \cdots < y_n$ où $a = y_k$ sont les seules réalisations dans M. Nous pouvons exprimer par la formule suivante que a est la k^{e} réalisation de $\phi(x, \bar{a})$ dans M :

$$\phi(x, \bar{a}) \wedge \exists y_1, \ldots, y_k \bigwedge_{i=1,\ldots,k} (y_i < x \vee y_i = x) \wedge \bigwedge_{i,j=1,\ldots,k, i \neq j} (y_i \neq y_j \wedge \phi(y_i, \bar{a}))$$

$$\wedge \forall z\, (\phi(z, \bar{a}) \wedge z \leq x) \to \bigvee_{i=1,\ldots k} (z = y_i).$$

L'élément a est la seule réalisation de cette formule, ce qui montre bien que $a \in dcl(A)$. $\square$

C'est pour cette raison que nous dirons souvent que $\bar{x}$ est algébriquement dépendant au lieu de dire qu'il est dépendant mais pour des raisons de facilité nous travaillerons plus souvent avec *dcl* qui est beaucoup plus facile à manipuler.

2.4 Dimension

Nous allons étudier une notion de dimension induite par la clôture définissable, nous supposerons dans ce paragraphe que $\mathcal{M}$ est κ-saturée (pour la saturation, voir paragraphe 1.1) pour un cardinal infini $\kappa > \max\{|A|, |B|\}$ où $A, B \subset M$. La plupart de ces résultats sont issus de l'article [19] de Anand Pillay. Certaines preuves s'inspirent également de [13].

Définition 2.4.1. Soit $\overline{a} \in M^n$, $\dim(\overline{a}/A) := \min\{|\overline{a'}| : \overline{a'} \subset \overline{a}$ et $\overline{a} \subset dcl(A \cup \overline{a'})\}$.

Lemme 2.4.2. *Soient* $\overline{a}, \overline{b} \in M^n$*,*

(i) $\dim(\overline{a}/A) = \max\{|\bar{a'}| : \bar{a'} \subset \bar{a}$ *et* $\bar{a'}$ *est algébriquement indépendant sur* $A\}$ *;*

(ii) $A \subset B \Rightarrow \dim(\overline{a}/A) \geq \dim(\overline{a}/B)$ *;*

(iii) $\dim(\overline{ab}/A) = \dim(\overline{a}/A \cup \overline{b}) + \dim(\overline{b}/A)$ *;*

(iv) $\dim(\overline{a}/A \cup \bar{b}) = \dim(\overline{a}/A)$ *ssi* $\dim(\overline{b}/A \cup \bar{a}) = \dim(\overline{b}/A)$.

Preuve. (i) Nous allons procéder par récurrence sur $\dim(\bar{a}/A)$.

Si $\dim(\bar{a}/A) = 0$, cela veut dire que $a_i \in \bar{a} \Rightarrow a_i \in dcl(A)$. Donc aucun $\bar{a'} \subset \bar{a}$ n'est algébriquement indépendant sur A, c'est-à-dire $\max\{|\bar{a'}| : \bar{a'} \subset \bar{a}$ et $\bar{a'}$ est algébriquement indépendant sur $A\} = 0$.

Supposons que la propriété soit vraie quand $\dim(\bar{a}/A) < k$.

Soit $\bar{a}$ tel que $\dim(\bar{a}/A) = \min\{|\overline{a'}| : \overline{a'} \subset \overline{a}$ et $\overline{a} \subset dcl(A \cup \overline{a'})\} = k$. Nous avons donc une famille minimale $a_1, \ldots, a_k \in \bar{a}$ telle que $\bar{a} \subset dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\})$. Montrons que $\dim((a_1, \ldots, a_k)/A) = k$:

- $(a_1, \ldots, a_k) \subset dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\})$,
- pour tout $i = 1, \ldots, k$, $a_i \notin dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\} \setminus \{a_i\})$ $(*)$:
  Sinon, on a $a_i \in dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\} \setminus \{a_i\})$ donc

$$\begin{aligned} dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\} \setminus \{a_i\}) &= dcl(dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\} \setminus \{a_i\})) \\ &= dcl(A \cup a_1, \ldots, a_k), \end{aligned}$$

  ce qui implique que $\bar{a} \subset dcl(A \cup \{a_1, \ldots, a_k\} \setminus \{a_i\})$ et contredit ainsi la minimalité de $a_1, \ldots, a_k$.

Donc $\dim((a_1, \ldots, a_k)/A) = k$.

$(*)$ implique que $a_1, \ldots, a_k$ sont algébriquement indépendants sur A. Supposons qu'il existe $k < j \leq n$ tel que $a_1, \ldots, a_k, a_j$ soient algébriquement indépendants sur A. Alors on aurait $a_j \notin dcl(A \cup x_1, \ldots, x_k)$ ce qui contredirait $\bar{a} \subset dcl(A \cup x_1, \ldots, x_k)$.

(ii) Soit $\bar{a'} \subset \bar{a}$, si $\bar{a'}$ est algébriquement indépendant sur B, alors $\bar{a'}$ est algébriquement indépendant sur A, donc $\dim(\overline{a}/A) \geq \dim(\overline{a}/B)$.

(iii) Soient $\bar{a'} \subset \bar{a}$ algébriquement indépendants sur $A \cup \bar{b}$ tels que $|\bar{a'}| = \dim(\bar{a}/A \cup \bar{b})$ et $\bar{b'} \subset \bar{b}$ algébriquement indépendants sur A tels que $|\bar{b'}| = \dim(\bar{b}/A)$. Nous allons montrer que $|\overline{a'b'}| = \dim(\overline{ab}/A)$ ce qui achèvera la preuve.

- $\overline{a'b'}$ sont algébriquement indépendants sur A :
  Pour tout $a \in \bar{a'}, a \notin dcl(A \cup \overline{a'b'} \setminus \{a\})\,(**)$ car on sait que $\bar{a'}$ est algébriquement indépendant sur $A \cup \bar{b}$ ce qui implique $a \notin dcl(A \cup \overline{a'b} \setminus \{a\}) \supset dcl(A \cup \overline{a'b'} \setminus \{a\})$.
  Pour tout $b \in \bar{b'}$, nous allons le montrer par récurrence que $b \notin dcl(A \cup \overline{a'b'} \setminus \{b\})$. Supposons que $b \notin dcl(A \cup \{a'_1, \ldots, a'_k\} \cup \bar{b'} \setminus \{b\})$ où $0 \leq k < |\bar{a'}|$. Si $b \in dcl(A \cup \{a'_1, \ldots, a'_{k+1}\} \cup \bar{b'} \setminus \{b\})$, par le lemme d'échange 2.3.3, $a'_{k+1} \in dcl(A \cup \{a'_1, \ldots, a'_k\} \cup \bar{b'}) \subset dcl(A \cup \overline{a'b'} \setminus \{a'_{k+1}\})$ ce qui contredit $(**)$.
- $\overline{a'b'}$ est maximal pour la relation d'indépendance algébrique sur A :
  Supposons qu'il existe $\overline{a''b''}$ algébriquement indépendants sur A tels que $\overline{a'b'} \subseteq \overline{a''b''} \subseteq \overline{ab}$ et tels que $\bar{a''} \supsetneq \bar{a'}$ ou $\bar{b''} \supsetneq \bar{b'}$.
  Si $\bar{a''} \supsetneq \bar{a'}$, on a $c \in \bar{a''} \setminus \bar{a'}$ tel que $c \notin dcl(A \cup \overline{b'a''} \setminus \{c\}) \supset dcl(A \cup \overline{a'b'})$. Comme $c \in \overline{ab}$, cela implique que $\overline{ab} \nsubseteq dcl(A \cup \overline{a'b'})$ ce qui contredit que $\overline{a} \subseteq dcl(A \cup \overline{a'})$ et $\overline{b} \subseteq dcl(A \cup \overline{b'})$.
  Si $\bar{b''} \supsetneq \bar{b'}$, on a que $\bar{b''}$ sont algébriquement indépendants sur A, ce qui contredit la maximalité de $\bar{b'}$.

(iv) En appliquant (iii), on obtient $\dim(\overline{ab}/A) = \dim(\bar{a}/A \cup \bar{b}) + \dim(\bar{b}/A) = \dim(\bar{b}/A \cup \bar{a}) + \dim(\bar{a}/A)$. Ce qui donne $\dim(\bar{a}/A \cup \bar{b}) - \dim(\bar{a}/A) = \dim(\bar{b}/A \cup \bar{a}) - \dim(\bar{b}/A)$ et prouve ainsi l'équivalence. □

Un élément $a \in M$ est algébriquement indépendant sur A ssi $a \notin dcl(A)$ ssi pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x, \bar{y})$ et pour tout $\bar{b} \subset A$, $\mathcal{M} \models \neg\phi(a, \bar{b}) \vee \exists c\ (\phi(a, \bar{b}) \wedge \phi(c, \bar{b}) \wedge c \neq a)$. Deux éléments qui possèdent le même type sur A seront donc de même dimension :

Lemme 2.4.3. *Soient un type $p \in S_n(A)$ et $\overline{a}, \overline{b}$ des réalisations de p, $\dim(\overline{a}/A) = \dim(\overline{b}/A)$.*

Ce lemme permet de donner du sens à la définition suivante :

Définition 2.4.4. Soit $p(\overline{x}) \in S_n(A)$, $\dim p = \dim(\overline{a}/A)$ pour une (toute) réalisation $\overline{a}$ de p.

Lemme 2.4.5. *Si $p(\bar{x}) \in S_n(A)$, et $A \subset B$, alors il existe $p' \in S_n(B)$ tel que $p \subset p'$ et $\dim p = \dim p'$.*

Preuve. Soient $p \subset q$ appartenant respectivement à $S_n(A)$ et $S_n(B)$, toutes les réalisations de q sont des réalisations de p. Donc, par le lemme 2.4.2(ii), $\dim q \leq \dim p$. Pour achever la preuve du lemme il suffit donc de trouver $p' \in S_n(B)$ tel que $p \subset p'$ et $\dim p \leq \dim p'$.

Soit $k := \dim p$ et $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ une réalisation de p. Nous allons dire que $a_1, \dots, a_k$ sont algébriquement indépendants sur A (quitte à permuter les éléments de $\bar{a}$ pour que ce soient les k premières composantes qui soient algébriquement indépendantes).

Nous allons construire inductivement $a'_1, \dots, a'_k$ algébriquement indépendants sur B et tels que $\mathrm{tp}(a'_1, \dots, a'_k/A) = \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_k/A)$. Supposons que de tels $a'_1, \dots, a'_{l-1}$ soient déjà construits. Nous allons construire a_l. Soient les ensembles $A_l = A \cup \{a_1, \dots, a_{l-1}\}$ et $B_l = B \cup \{a_1, \dots, a_{l-1}, a'_1, \dots, a'_{l-1}\}$.

Soit l'ensemble de formules $F := \{\phi(x, \bar{b}) : \bar{b} \in B_l$ et $\phi(x, \bar{b})$ n'a qu'un nombre fini de réalisations dans $\mathcal{M}\}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{F} := \{\neg\phi(x, \bar{b}) : \phi(x, \bar{b}) \in F\}.$$

L'ensemble des réalisations d'une formule de $\mathcal{F}$ est cofini dans M. Ainsi nous avons directement que $\mathcal{F}$ est finiment consistant et par compacité est consistant avec la théorie de $\mathcal{M}$. Nous pouvons donc étendre $\mathcal{F}$ en un type $q_l \in S_1(B_l)$. De plus, comme a_l est algébriquement indépendant sur A_l, nous avons que $\mathrm{tp}(a_l/A_l) \subset \mathcal{F} \subset q_l$. Par saturation de $\mathcal{M}$, nous pouvons trouver a'_k une réalisation de q_l dans $\mathcal{M}$.

Nous obtenons donc inductivement des éléments algébriquement indépendants sur A, $a'_1, \dots, a'_l \in M$ tels que $\mathrm{tp}(a'_1, \dots, a'_l/A) = \mathrm{tp}(a_1, \dots, a_l)$. Une fois que nous avons construit q_k, il faut remplacer tous les $a'_1, \dots a'_{k-1}$ par des variables libres de telle manière que nous obtenions un type $q'_k \in S_k(B \cup \{a_1, \dots, a_{k-1}\})$. On étend ce type en un type $q'_n \in S_n(B \cup \{a_1, \dots, a_{k-1}\})$. Le type $p' := q'_n\restriction_B$ est donc le type cherché car $(a'_1, \dots, a'_k)$ est une réalisation de ce type dans M. □

Définition 2.4.6. Soit $X \subset M^n$ un ensemble A-définissable, $\dim X := \max\{\dim(\overline{a}/A)$: $\bar{a} \in X\} = \max\{\dim\ p : p \in S_n(A)$ et p est réalisé dans $X\}$.

La dimension des types est une approche qui a le mérite de nous faire remarquer que $\dim(X)$ ne dépend pas de A. En effet, si $B \supset A$, le lemme

2.4.2(ii), montre que $\dim(X/A) \geq \dim(X/B)$ où $\dim(X/A)$ désigne la dimension de X au sens de la relation de dépendance algébrique sur A. Par le lemme 2.4.5, $\dim(X/A) \leq \dim(X/B)$.

Lemme 2.4.7. *Soit $X \subset M^n$ ensemble A-définissable, alors (pour $k \leq n$) $\dim(X) \geq k$ si est seulement s'il existe une projection de X sur M^k d'intérieur non-vide dans M^k.*

Preuve. [$\Rightarrow$] Soit X un ensemble A-définissable de dimension $\dim X \geq k$. Soit $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un point générique de X sur A tel que $a_1, \dots a_k$ sont algébriquement indépendants sur A. Soit Y la projection de X sur les k premières coordonnées, Y est A-définissable dans M^k. Nous allons montrer que la présence de $(a_1, \dots, a_k)$ dans Y implique que Y est d'intérieur non-vide dans M^k. Nous procéderons par induction :

- $k = 1$: par indépendance algébrique, $a_1 \notin dcl(A)$. Or $a_1 \in Y$ ce qui entraîne que Y est infini (s'il était fini, on pourrait exprimer par une formule du premier ordre que a_1 est le j^{e} élément de Y comme dans la preuve du lemme 2.3.4, ce qui entraînerait que $a_1 \in dcl(A)$). Donc Y est infini et contient par o-minimalité un intervalle ouvert.
- Supposons que Y a une projection dans $M^k (k = l)$ contenant un pavé. Pour $k = l + 1$: nous avons que $\{a_1, \dots, a_{l+1}\}$ est algébriquement indépendant sur A et que $(a_1, \dots, a_{l+1}) \in Y$. Nous allons supposer que Y est une cellule, ce qui est amplement suffisant au vu du théorème de décomposition cellulaire 2.2.14.
  Si Y est un graphe $\Gamma(f)$ où $f : Z \to M$ est une fonction A-définissable et $Z \subset M^l$ est un pavé A-définissable. Comme $(a_1, \dots, a_{l+1}) \in Y$, on a $a_{l+1} = f(a_1, \dots, a_l)$ ce qui contredit l'indépendance algébrique de $(a_1, \dots, a_{l+1})$.
  Donc Y est d'office de la forme $Y = (f, g)_Z := \{(x_1, \dots x_{l+1}) \in M^{l+1} : (x_1, \dots, x_l) \in Z$ et $f(x_1, \dots, x_l) < x_{l+1} < g(x_1, \dots, x_l)\}$ où $f, g : Z \to M$ sont des fonctions continues ($f < g$). Par le fait qui commence le paragraphe 2.2, on sait que Y contient un pavé et est ainsi d'intérieur non vide.

[$\Leftarrow$] Supposons qu'il existe une projection Y de X dans M^k qui est d'intérieur non-vide, Y contient donc un pavé B-définissable $Z \subset M^k$. Soit A l'ensemble des paramètres sur lesquels X et Y sont définis. Par saturation, nous allons trouver inductivement $a_1, \dots, a_k$ algébriquement indépendants sur B tels que $(a_1, \dots, a_k) \in Z$. Supposons que $a_1, \dots, a_{k-1}$ sont déjà construits. Soit le type

$$p(x) = \{(a_1, \dots, a_{k-1}, x) \in Z\} \cup E$$

où $E = \{\phi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x) : \phi(a_1, \ldots, a_{k-1}, x)$ a une unique réalisation dans $\mathcal{M}\}$. Nous prenons pour a_k une réalisation de p.

Par construction, $\dim(a_1, \ldots, a_k/B) = k$. Par construction de Y, on peut trouver $\bar{a} \in X$ qui contient $a_1, \ldots, a_k$. De plus, il est clair que $\dim(X) \geq \dim(\bar{a}/A) \geq \dim(\bar{a}/B) \geq k$. $\square$

En particulier, nous avons :

Lemme 2.4.8. *Soit l'ensemble A-définissable $X \subset M^n$,* $\dim X = n$ *ssi X est d'intérieur non-vide dans M^n.*

Remarque 2.4.9. Nous constatons grâce à ces deux derniers lemmes et à la proposition 2.2.9 que la notion de dimension définie pour les cellules (définition 2.2.3) est identique à celle-ci.

Lemme 2.4.10. *(i) Soient $X \subset M^n$ un ensemble et $f : X \to Y \subset M^k$ une bijection tous deux A-définissables,* $\dim X = \dim Y$.

(ii) Soient $X_1, \ldots, X_r$ sous-ensembles A-définissable de M^n, alors $\dim(X_1 \cup \cdots \cup X_r) = \max\{\dim X_i : i = 1, \ldots r\}$.

Preuve. (i) Soit $\bar{a} \in X$, il est clair que $(\bar{a}, f(\bar{a})) \subset dcl(\bar{a} \cup A)$ et $(\bar{a}, f(\bar{a})) \subset dcl(f(\bar{a}) \cup A)$. Soit $\bar{a}' \subset \bar{a}$ minimal et tel que $\bar{a} \subset dcl(A \cup \bar{a}')$, par conséquent, $f(\bar{a}) \subset dcl(A \cup \bar{a}')$ ce qui entraîne que $f(\bar{a}) \subset dcl(A \cup f(\bar{a}'))$. S'il existe $\bar{b} \subsetneq \bar{a}'$ tel que $f(\bar{a}') \subset dcl(A \cup f(\bar{b}))$, alors $\bar{a} \subset dcl(A \cup f(\bar{b}))$ et $\bar{a} \subset dcl(A \cup \bar{b})$ ce qui contredit la minimalité de $\bar{a}'$. Donc, $f(\bar{a}')$ est minimal tel que $f(\bar{a}) \subset dcl(A \cup f(\bar{a}'))$. Nous en déduisons que $\dim(\bar{a}/A) = \dim(f(\bar{a})/A)$, ce qui montre que $\dim(X) = \dim(Y)$.

(ii) Evident. $\square$

Lemme 2.4.11. *Soient $\theta(x_1, \ldots, x_n, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule et pour tout $\bar{b}$, $X_{\bar{b}} := \theta(M^n, \bar{b})$. Pour tout $k \leq n$, il existe une $\mathcal{L}$-formule $\psi_k(\bar{y})$ telle que pour tout $\bar{b}$,* $\dim X_{\bar{b}} = k$ *ssi $\mathcal{M} \models \psi_k(\bar{b})$.*

Preuve. Cela découle du lemme 2.4.7 car le fait de posséder une projection d'intérieur vide est exprimable au premier ordre. Soit $k \leq n$, et $(i_1, \ldots, i_n) \in P$ l'ensemble des permutations de $(1, \ldots, n)$, nous posons :

$$\phi_{k,i_1,\ldots,i_n}(\bar{y}) \equiv a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}, [\bigwedge_{j=1}^{k} a_{i_j} < b_{i_j}]$$

$$\wedge[\forall x_{i_1} \ldots x_{i_k}, \bigwedge_{j=1}^{n} (a_{i_j} < x_{i_j} < b_{i_j}) \to \exists x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n} \theta(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, \bar{y})].$$

Cette formule signifie qu'il existe un pavé dans M^k qui est inclus dans la projection de $\theta(M^n, \bar{y})$ sur les coordonnées d'indices $i_1, \ldots, i_k$.

Soit $\psi_k(\bar{y}) \equiv \bigvee_{(i_1,\ldots,i_n)\in P} \phi_{k,i_1,\ldots,i_n}(\bar{y}) \wedge \bigwedge_{(i_1,\ldots,i_n)\in P} \neg\phi_{k+1,i_1,\ldots,i_n}(\bar{y})$. La formule $\psi_k(\bar{y})$ exprime que $X_{\bar{y}}$ possède au moins une projection d'intérieur non vide dans M^k et que toutes les projections possibles dans M^{k+1} sont d'intérieur vide ce qui est équivalent au fait que $X_{\bar{y}}$ est de dimension k (lemme 2.4.7). Ainsi, $\dim X_{\bar{b}} = k$ ssi $\mathcal{M} \models \psi_k(\bar{b})$. □

Proposition 2.4.12. *Soit $X \subset M^n$ un ensemble A-définissable, $\dim X \geq k+1$ ssi il existe une relation d'équivalence A-définissable E sur X dont une infinité de classes d'équivalence sont de dimension $\geq k$.*

Preuve. [⇒] Si $\dim X \geq k+1$, nous savons par le lemme 2.4.7 qu'il existe une projection de X sur M^{k+1} qui contient un pavé $B = I_1 \times \cdots \times I_{k+1}$ où les I_i sont des intervalles. Nous définissons sur B la relation d'équivalence suivante : $(x_1, \ldots, x_{k+1}) \sim (y_1, \ldots, y_{k+1})$ ssi $x_1 = y_1$. Cette relation d'équivalence possède une infinité de classes de la forme

$$[(x_1, \ldots, x_{k+1})]_\sim = \{(x_1, y_2, \ldots, y_{k+1}) : y_i \in I_i, i = 2, \ldots, k+1\}.$$

Ces classes sont clairement de dimension k. En étendant cette relation d'équivalence à X, on obtient la relation souhaitée.

[⇐] Supposons que nous ayons une relation d'équivalence définissable E sur X dont une infinité de classes d'équivalence sont de dimension $\geq k$ et que $\dim X = k$.

Par le théorème de décomposition cellulaire 2.2.14 et le lemme 2.4.10(ii), on peut sans perte de généralité supposer que X est une cellule.

Par la proposition 2.2.9, nous avons une projection définissable $\pi : M^n \to M^k$ telle que $\pi(X)$ homéomorphe à X. Soit E^1 la relation d'équivalence sur $\pi(X)$, dont les classes sont l'image par π des classes de E. Pour toute classe d'équivalence C de E telle que $\dim C \geq k$, on a bien sûr que $\dim C = k$ et par le lemme 2.4.10(i), $\dim \pi(C) = k$. Nous pouvons donc dire par le lemme 2.4.8 que $\pi(C)$ est d'intérieur non vide dans M^k. Cela nous montre l'existence d'une infinité de classes de E^1 qui sont d'intérieur non vide dans M^k ce qui contredit le lemme 2.4.13. □

Lemme 2.4.13 (A. Pillay, [20], proposition 2.1)**.** *Soit $E(\bar{x}, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule à paramètres dans A qui définit une relation d'équivalence sur M^n. Le nombre de E-classes d'intérieur non vide (dans M^n) est fini. De plus, ces classes d'intérieur non vide sont A-définissables.*

Preuve. Soit $X := \{\bar{a} \in M^n :$ il existe un ouvert $W \subset M^n$ tel que $\bar{a} \in W$ et $\mathcal{M} \models \bar{x} \in W \to E(\bar{x}, \bar{y})\}$, l'ensemble des points qui sont à l'intérieur d'une

E-classe d'équivalence. Cet ensemble X est A-définissable (pour le voir il suffit de demander que W soit un pavé, ce qui ne change rien à l'ensemble X). Par le théorème de décomposition cellulaire 2.2.14, X est une union disjointe de cellules A-définissables $C_i \subset M^n$ $(i < k)$.

Sous-lemme. Soit Z une classe d'équivalence de E d'intérieur non vide, alors pour un certain $i = 1, \ldots, k$, $X_i \subset Z$.

Il s'en suit qu'un nombre fini de E-classes est d'intérieur non vide. De plus, si Z est une telle E-classe, elle contient une cellule $X_i \subset Z$. Ce qui implique que $Z := \{\bar{a} \in M^n : \exists \bar{x} \in X_i,\ E(\bar{x}, \bar{a})\}$. Cet ensemble est bien A-définissable car E et X_i le sont aussi.

Preuve du sous-lemme. Comme Z est d'intérieur non vide, on a que $Z \cap X \neq \varnothing$. Nous avons donc $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $Z \cap X_i \neq \varnothing$. Supposons que $Z \cap X_i$ soit un sous-ensemble propre de X_i que nous savons être définissablement connexe (par ref...). Cet ensemble définissable ne peut être à la fois fermé et ouvert dans X_i, ce qui nous donne l'existence d'un point $\bar{a} \in X_i$ tel que pour tout ouvert $W \ni \bar{a}$, $W \cap X_i$ contienne au moins un point de Z et un point qui n'est pas dans Z. Cela contredit le fait que $\bar{a} \in X$. Ainsi, $X_i \subset Z$. □

La preuve du sous-lemme achève ainsi la preuve du lemme. □

La proposition suivante est énoncée pour information, elle ne sera pas utilisée dans la suite :

Proposition 2.4.14. *Soit $X \subset M^n$ définissable,* $\dim X \geq k + 1$ *ssi il existe $Y \subset X$ définissable tel que* $\dim Y \geq k$ *et Y est d'intérieur vide dans X.*

Preuve. Voir [19], proposition 1.9. □

2.5 Généricité

Définition 2.5.1. Soit X un ensemble A-définissable et $\bar{a} \in X$. Nous dirons que $\bar{a}$ est un point générique de X sur A si $\dim(\bar{a}/A) = \dim X$.

Définition 2.5.2. Soit $Y \subset X \subset M^n$ des ensembles définissables, on dit que Y est large dans X ssi $\dim(X \setminus Y) < \dim X$.

Lemme 2.5.3. *Y est large dans X ssi pour tout A sur lequel X et Y sont définis et pour tout $\bar{a}$ point générique de X sur A, $\bar{a} \in Y$.*

Preuve. Si Y est large dans X, on a que $\dim(X \setminus Y) < \dim X$ ce qui implique que tous les point génériques de X sur A sont dans Y.

Si tous les points génériques de X sur A sont dans Y, alors $X \setminus Y$ ne contient aucun point générique ce qui implique que $\dim(X \setminus Y) < \dim X$. □

Proposition 2.5.4. *(i) Soient $Y \subset Z \subset X$, si Y est large dans X, alors Z l'est aussi.*

(ii) Soient Y_1, Y_2 des ensembles larges dans X, les ensembles $Y_1 \cup Y_2$ et $Y_1 \cap Y_2$ le sont aussi.

Preuve. Au vu du lemme précédent tout cela est vraiment évident. $\square$

Proposition 2.5.5. *Soient $X \subset M^n$ A-définissable, et $\phi(x_1, \cdots, x_n, \bar{y})$ formule (sans paramètre). Alors $E := \{\bar{b} \in M^m : \phi(M^n, \bar{b}) \cap X$ est large dans $X\}$ est A-définissable.*

Preuve. Soient n la dimension de X, $\psi(\bar{x}, \bar{a})$ telle que $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}[\bar{x} \in X \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{a})]$ et $\chi(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) \equiv \neg\phi(\bar{x}, \bar{b}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{a})$. Par construction, $\chi(M^n, \bar{a}, \bar{b})$ est le complémentaire de $\phi(M^n, \bar{b})$ dans X, ensemble que nous noterons $C_{\bar{b}}$.

Par le lemme 2.4.11, nous savons qu'il existe une formule $\psi_n(\bar{y})$ telle que pour tout $\bar{z}$, $\dim C_{\bar{z}} = n$ ssi $\mathcal{M} \models \psi_n(\bar{z})$. Avec ces notation, nous pouvons écrire $E = \{\bar{b} \in M^m : \dim C_{\bar{b}} \neq n\}$. Nous en déduisons que $\bar{b} \in E$ ssi $\mathcal{M} \models \neg\psi_n(\bar{z})$. $\square$

Les résultats suivants ne font pas partie de l'article [19], ils sont cependant essentiels pour la preuve du théorème 4.2.1.

Lemme 2.5.6. *Soit X un sous-ensemble de M^k Soient $\bar{a}, \bar{b} \in X$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\bar{a}$ est générique de X sur $\bar{b}$ et $\bar{b}$ est générique de X sur $\varnothing$;

(ii) $\bar{a}$ est générique de X sur $\varnothing$ et $\bar{b}$ est générique de X sur $\bar{a}$;

(iii) $\bar{a}$ est générique de X sur $\bar{b}$ et $\bar{b}$ est générique de X sur $\bar{a}$.

Preuve. $(i) \rightarrow (ii)$: Il est évident que si $\bar{a}$ est générique sur $\bar{b}$, il l'est également sur $\varnothing$ (par le lemme 2.4.2(ii)). Donc $\dim(\bar{a}/\bar{b}) = \dim(\bar{a}/\varnothing)$ et par le lemme 2.4.2(iv), $\dim(\bar{b}/\bar{a}) = \dim(\bar{b}/\varnothing)$. De plus, on a que $\bar{b}$ est générique sur $\varnothing$, c'est à dire que $\dim(\bar{b}/\varnothing) = \dim(X)$. On en déduit que $\dim(\bar{b}/\bar{a}) = \dim(\bar{b}/\varnothing) = \dim(X)$, ce qui montre bien que $\bar{b}$ est générique de X sur $\bar{a}$.

$(ii) \rightarrow (i)$: Est tout à fait similaire (les rôles de $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont intervertis).

$(ii) \rightarrow (iii)$: Par l'équivalence déjà prouvée, $(ii) \Rightarrow (i) \wedge (ii)$ et il est évident que $(i) \wedge (ii) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \rightarrow (ii)$: Car si $\bar{a}$ est générique sur $\bar{b}$, il l'est sur $\varnothing$. $\square$

Définition 2.5.7. Nous dirons que $\bar{a}$ et $\bar{b} \in X$ sont mutuellement génériques (ou plus précisément mutuellement génériques de X sur $\varnothing$) s'ils satisfont une des assertions du lemme précédent.

Proposition 2.5.8. *Tout point générique de $X \times X$ sur $\varnothing$ est de la forme $(\bar{a}, \bar{b})$ où $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont des points de X mutuellement génériques sur $\varnothing$.*

Preuve. Soit k la dimension de X, montrons que la dimension de $X \times X$ est alors $2.k$.

- Par le lemme 2.4.7, on sait que $\dim X \geq k$ ssi il existe une projection de X dans M^k qui est d'intérieur non vide. Nous avons donc une projection $p : X \to M^k$ qui est d'intérieur non vide. Par conséquent, l'image de la projection $X \times X \to M^{2k} : (x, y) \mapsto (p(x), p(y))$ est d'intérieur non vide et on a $\dim(X \times X) \geq 2.k$.
- Supposons maintenant que $\dim(X \times X) > 2k$, nous avons une projection $p : X \times X \to M^{2k+1}$ telle que $p(X \times X)$ est d'intérieur non vide. De plus, $p : (x, y) \mapsto (p_1(x), p_2(y))$ où p_1 et p_2 sont des projections. Comme $p(X \times X) = p_1(X) \times p_2(X)$ est d'intérieur non vide dans M^{2k+1}, l'un des $p_i(X)$ est d'intérieur non vide dans M^m où $m \geq k+1$, ce qui contredit le fait que $\dim(X) = k$.

Soit un point générique $(\bar{a}, \bar{b})$ de $X \times X$ sur $\varnothing$, $\dim((\bar{a}, \bar{b})/\varnothing) = 2.k$. Comme $\bar{a}, \bar{b} \in X$ et $\dim X = k$, $\dim(\bar{a}/\varnothing) = \dim(\bar{b}/\varnothing) = k$. Donc $\bar{b}$ est générique sur $\varnothing$. De plus, par 2.4.2(iii), on sait que $\dim((\bar{a}, \bar{b})/\varnothing) = \dim(\bar{a}/\bar{b}) + \dim(\bar{b}/\varnothing)$, c'est à dire $2k = \dim(\bar{a}/\bar{b}) + k$. Par suite, $\bar{a}$ est générique sur $\bar{b}$, ce qui montre bien que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont mutuellement génériques. $\square$

2.6 Caractéristique d'Euler

Nous allons associer à tout ensemble définissable un entier appelé la caractéristique d'Euler. Comme exemple simple, nous pouvons examiner un intervalle : une partition finie de cet intervalle en cellules consiste en k points et $k + 1$ intervalles ($k \in \mathbb{N}$). L'entier $k - (k + 1) = -1$ ne dépend pas de la manière de décomposer l'intervalle. Nous pouvons généraliser cette observation pour des ensembles définissables arbitraires. Pour plus d'informations sur le sujet, je propose la lecture de [5].

Définition 2.6.1. Soit une cellule C, nous définissons $E(C) := (-1)^{\dim C}$. Soit S un ensemble définissable et P une partition de S en cellules, $E_P(S) := \sum_{C \in P} E(C)$.

Lemme 2.6.2. *Soient P et P' deux partitions de S en cellules, $E_P(S) = E_{P'}(S)$.*

Lemme 2.6.3. *Si $\mathcal{D}$ est une décomposition d'une cellule C en sous-cellules, $E_P(C) = E(C) := (-1)^{\dim C}$.*

Preuve. Nous procédons par induction. Si $C \subset M$, c'est évident au vu de la remarque introductive de ce paragraphe.

Supposons que le lemme soit vrai pour toute cellule $C \subset M^k (k \leq m)$. Si $C \subset M^{m+1}$ et π désigne la projection $M^{m+1} \to M^m$, pour toute décomposition $\mathcal{D}$ de C par l'hypothèse que nous avons faite, $E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi(C)) = E(\pi(C))$.

- Si C est une $(i_1, \ldots, i_m, 1)$-cellule. Soit $B \in \pi(\mathcal{D})$, les cellules de $\mathcal{D}$ donc l'image par π est B sont de la forme :

$$\Gamma(f_1), \ldots, \Gamma(f_t), (f_0, f_1), \ldots, (f_t, f_{t+1}),$$

  où les f_i sont des fonctions continues définissables sur B. Soit $d := \dim(B)$. La caractéristique d'Euler de l'union (disjointe) de ces cellules est $t.(-1)^d + (t+1).(-1)^{d+1} = (-1)^{d+1} = -E(B)$. En sommant sur $B \in \pi(\mathcal{D})$, on obtient

$$E_{\mathcal{D}}(C) = -\sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} E(B) = -E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi(C)) = -E(\pi(C)) = E(C).$$

- Si C est une $(i_1, \ldots, i_m, 0)$-cellule. Les cellules de $\mathcal{D}$ sont de la forme $\Gamma(f_B)$ où f_B sont des fonctions définissables continues $B \to M$, et $B \in \pi(\mathcal{D})$. Pour tout B, $E(\Gamma(f_B)) = E(B)$. Ainsi,

$$E_{\mathcal{D}}(C) = \sum_{B \in \pi(\mathcal{D})} E(B) = E_{\pi(\mathcal{D})}(\pi(C)) = E(\pi(C)) = E(C).$$

□

Preuve du lemme 2.6.2. Soit P^* un raffinement commun de P et P', c'est à dire une décomposition qui partitionne à la fois toutes les cellules de P et P',

$$\begin{aligned} E_{P^*}(S) &= \sum_{C \in P^*} E(C) \\ &= \sum_{C \in P} \sum_{\substack{A \subset C \\ A \in P^*}} E(A) \\ &= \sum_{C \in P} E(C) \text{ par le lemme 2.6.3} \\ &= E_P(S). \end{aligned}$$

Un argument similaire montre que $E_{P^*}(S) = E_{P'}(S)$. □

Définition 2.6.4. La caractéristique d'Euler d'un ensemble définissable S est $E_P(S)$ pour une (toute) partition P de S en cellules. Nous conviendrons que $E(\varnothing) = 0$.

Il n'est pas difficile de vérifier que la caractéristique d'Euler d'un ensemble fini de cardinalité n est elle-même n. Cette notion servira de généralisation de la cardinalité dans le paragraphe 4.3.

Remarque 2.6.5. Soient S_1 et $S_2 \subset M^m$ des ensembles définissables, $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2) - E(S_1 \cap S_2)$.

Preuve. Il est clair vu la définition que si $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, $E(S_1 \cup S_2) = E(S_1) + E(S_2)$. Pour obtenir la formule voulue, il suffit de voir que S_1 est l'union disjointe de $S_1 \setminus (S_1 \cap S_2)$ et $S_1 \cap S_2$ et S_2 est l'union disjointe de $S_2 \setminus (S_1 \cap S_2)$ et $S_1 \cap S_2$. □

Proposition 2.6.6. *Soit $S \subset M^{m+n}$ définissable, pour tout $a \in M^m$, nous désignons par S_a la fibre $\{y \in M^n : (a, y) \in S\}$. En faisant varier a dans M^m, $E(S_a)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs $e \in \mathbb{Z}$. De plus, pour tout entier e, l'ensemble $S(e) := \{a \in M^m : E(S_a) = e\}$ est définissable. Autrement dit, il existe une décomposition $\mathcal{D}^*$ de M^{m+n} qui partitionne S en cellules telles que soient $\pi : M^{m+n} \to M^m$ la projection sur les m premières coordonnées et une cellule $A \in \pi(\mathcal{D}^*) := \{\pi(C) : C \in \mathcal{D}^*\}$, il existe un entier e_A tel que $E(S_a) = e_A$ pour tout $a \in A$, et*

$$E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(A)e_A.$$

Preuve. Soit $\mathcal{D}$ une décomposition de S et $A \in \pi(\mathcal{D})$, on a donc $A = \pi(C)$ où C est une $(i_1, \ldots, i_{m+n})$-cellule. Pour tout $a \in A$, la fibre C_a est donc une $(i_{m+1}, \ldots, i_{m+n})$-cellule, ce qui montre que $E(C) = (-1)^{i_1+\cdots+i_{m+n}} = (-1)^{i_1+\cdots+i_m}.(-1)^{i_{m+1}+\cdots+i_{m+n}} = E(A).E(C_a)$. Comme $\pi^{-1}(A) \cap S$ est une union finie de cellules $C^j \in \mathcal{D}$ $(j = 1, \ldots, l)$, et comme S_a est l'union des cellules-fibres C_a^j, $E(S_a) = \sum_j C_a^j$. Cet argument montre à la fois que les $S(e)$ sont définissables et que e ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par le théorème de décomposition cellulaire 2.2.14, il existe une décomposition $\mathcal{D}^*$ qui partitionne simultanément, S et les ensembles définissables $D(e) = \{(a, b) : a \in S(e), b \in S_a\}$ pour tous $e \in \mathbb{Z}$ (il n'y a qu'un nombre fini de $D(e)$ qui sont non vides). Ainsi, nous obtenons bien la constance de $E(S_a)$ sur toute cellule $A \in \pi(\mathcal{D}^*)$ ainsi que la formule $E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(A)e_A$. □

Lemme 2.6.7. *Soit $S \subset M^{m+n}$ définissable, supposons que pour tout $a \in M^m$, $E(S_a) = e$ pour un entier e qui reste fixe. Alors*

$$E(S) = E(\pi(S)).e$$

En particulier, pour tous $A \subset M^m$, $B \subset M^n$, $E(A \times B) = E(A).E(B)$.

Preuve. La première assertion découle très simplement de la proposition précédente : soient $\mathcal{D}$ une partition de S en cellule et $\pi(\mathcal{D})$ définis comme précédemment, nous pouvons grâce au théorème de décomposition cellulaire trouver une décomposition $\mathcal{D}'$ de M^m qui partitionne à la fois $\pi(S)$ et $\pi(\mathcal{D})$. Nous aurons donc par la proposition ci-dessus, pour tout $A \in \mathcal{D}'$, $E(\pi^{-1}(A) \cap S) = E(A)e$. Par la remarque 2.6.5, si $A_1, \dots A_k$ désignent les cellules de $\mathcal{D}'$ qui sont incluses à $\pi(S)$, $E(S) = \sum_{i=1,\dots,k} E(\pi^{-1}(A_i) \cap S) = \sum_{i=1,\dots,k} E(A_i)e = e \sum_{i=1,\dots,k} E(A_i) = e.E(\pi(S))$.

La seconde assertion est un cas particulier de la première en remplaçant S par $A \times B$. □

Nous avons montré que la dimension est invariante par bijection définissable (voir lemme 2.4.10). Il en est de même de la caractéristique d'Euler :

Proposition 2.6.8. *Si $f : S \to T$ est une bijection définissable, alors $E(S) = E(T)$.*

Preuve. Voir [5], chapitre 4, proposition 2.4. □

Chapitre 3

Groupes topologiques

3.1 Groupes topologiques

Soit $(G, ., 1)$ un groupe qui est de plus un espace topologique, nous dirons que G est un groupe topologique si et seulement si les applications $x \mapsto x^{-1}$ et $(x, y) \mapsto x.y$ sont continues[1] (sauf indication contraire, tous les groupes seront notés multiplicativement).

Par exemple, le groupe $(\mathbb{R}, +, 0)$ muni de la topologie issue de la valeur absolue usuelle $|\cdot|$ est un groupe topologique. De même, le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles $n \times n$ inversibles et son sous-groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ des matrices de déterminant 1 sont des groupes topologiques. Enfin, le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est un exemple essentiel pour la suite. Rappelons nous qu'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si la transposée de Q et l'inverse de Q coïncident (autrement dit, si $Q^t.Q = Q.Q^t = 1$).

Lemme 3.1.1. *Soit G un groupe topologique, G est un espace topologique homogène c'est à dire que pour tous $x, y \in G$, il existe un homéomorphisme $\sigma : G \mapsto G$ tel que $\sigma(x) = y$.*

Preuve. Pour tous $x, y \in G$, on considère l'application $\sigma : g \mapsto g.x^{-1}.y$ qui est un homéomorphisme par définition de groupe topologique. □

Remarque 3.1.2. Considérons un groupe topologique G et $x, y \in G$, l'application $\sigma : G \to G : g \mapsto g.x^{-1}.y$ est un homéomorphisme qui envoie 1 sur $x.y$. Ainsi, les ensembles xVy où V est un voisinage de 1 forment une base de voisinages de $x.y$.

[1]Nous plaçons sur $G \times G$ la topologie produit de celle de G. Cela donne du sens à la continuité de la multiplication.

Corollaire 3.1.3. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Le groupe H muni de la topologie induite de G est un groupe topologique. Si H est d'intérieur non vide, H est ouvert dans G.*

Preuve. Il est évident que H est un groupe topologique.
Par 3.1.1, si un des points de H possède un voisinage inclus à H, tous les points de H en possèdent un. $\square$

Lemme 3.1.4. *Soient G un groupe topologique et V un voisinage de 1 dans G. L'ensemble V^{-1} est un voisinage de 1. De plus, il existe un voisinage W de 1, tel que $W^2 \subset V$.*

Preuve. L'inversion est un homéomorphisme de G qui fixe l'identité. Par conséquent si V est un voisinage de 1, V^{-1} l'est aussi.
La multiplication $m : G^2 \to G$ est une application continue au point $(1,1)$. Ainsi, pour tout voisinage V de 1, il existe des voisinages V_1 et V_2 de 1 tels que $V_1.V_2 \subset V$, $W := V_1 \cap V_2$ est un voisinage de 1 et $W^2 \subset V$. $\square$

Lemme 3.1.5. *Soit H un sous-groupe de G :*

(i) l'adhérence $\bar{H}$ de H dans G est un sous-groupe de G ;

(ii) si H est ouvert dans G, alors H est fermé dans G.

Preuve. (i) Il est clair que $1 \in \bar{H}$ puisque $H \subset \bar{H}$.
Montrons que si $x \in \bar{H}$, alors $x^{-1} \in \bar{H}$: pour tout voisinage ouvert V de x^{-1}, V^{-1} est un voisinage ouvert de x. On sait que $V^{-1} \cap H \neq \varnothing$ (car $x \in \bar{H}$), on en déduit que $(V^{-1} \cap H)^{-1} = V \cap H^{-1} = V \cap H \neq \varnothing$.
Il nous reste donc à vérifier que si $x, y \in \bar{H}$, alors $x.y \in \bar{H}$. Soit V un voisinage ouvert de 1, par 3.1.4 on peut trouver $W \subset V$ un voisinage ouvert de l'identité tel que $W^2 \subset V$. Les translatés xW et Wy sont des voisinages respectifs de x et y. Comme $x, y \in \bar{H}$, on peut trouver des éléments de la forme xw_1, w_2y appartenant à H (avec $w_1, w_2 \in W$). Par conséquent, le voisinage xVy de xy contient $x.w_1.w_2.y \in H$ (car $W^2 \subset V$, entraîne que $w_1.w_2 \in V$). Par la remarque 3.1.2, cela prouve que $x.y \in \bar{H}$.

(ii) Si H est ouvert, les classes latérales de H le sont aussi. Ainsi $G - H$ est une union d'ouverts et est donc ouvert, ce qui permet de dire que H est fermé.

$\square$

Nous allons maintenant équiper tout quotient de G d'une topologie qui en fait un groupe topologique.

Définition 3.1.6. Soit T un espace topologique et E une relation d'équivalence sur T. Nous définissons la topologie quotient de T/E étant la topologie la plus fine (celle qui a le plus d'ouverts) qui rend la projection $\mu : T \to T/E$ continue.

Nous avons donc que $X \subset T/E$ est ouvert (resp. fermé) ssi $\mu^{-1}(X)$ est ouvert (resp. fermé) dans T. Autrement dit, un ensemble de classes du quotient T/E est ouvert (resp. fermé) ssi l'union de ses classes est ouverte (resp. fermée) dans T.

Proposition 3.1.7. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe normal de G, G/H muni de la topologie quotient est un groupe topologique.*

Preuve. Nous savons par hypothèse que l'inversion et la multiplication sont continues dans G. Soient $x, y \in G$ et V un ouvert de G/H, alors $U := \mu^{-1}(V) = \{g \in G : g.H \in V\}$ est un ouvert. Par continuité de l'inversion dans G, U^{-1} est un ouvert dans G. Considérons maintenant l'ensemble $V^{-1} = \{g.H : g^{-1}H \in V\}$, $\mu^{-1}(V^{-1}) = \{g \in G : g^{-1}H \in V\}$ est égal à U^{-1} qui est ouvert.

Soit $U^- := \{(x, y) \in G^2 : x.yH \in V\}$, par continuité de la multiplication dans G, U^- est ouvert. Nous allons maintenant regarder $V^- := \{(g.H, h.H) \in (G/H)^2 : g.h.H \in V\}$. Nous voyons aisément que $\mu^{-1}(V^-) = \{(g, h) \in G^2 : g.h.H \in V\}$ est égal à U^- qui est un ouvert de G^2. □

Nous allons maintenant regarder comment se comporte un groupe topologique en ce qui concerne la connexité.

Lemme 3.1.8. *Soit G un groupe topologique et G^0 la composante connexe de l'identité de G. G^0 est un sous-groupe normal fermé de G.*

Preuve. La composante connexe G^0 est fermée : dans un espace topologique, toute composante connexe est fermée (car si un ensemble est connexe, c'est aussi le cas de son adhérence).

Pour tout $a \in G^0$, G^0 est la composante connexe de a. L'application $f_a : G \to G : x \to a.x$ est un homéomorphisme. Il permute donc les composantes connexes de G. Ce qui implique que $f_a(G^0) = aG^0$ est la composante connexe de a. Donc $G^0 = aG^0$ ce qui montre que G^0 est un sous-groupe de G.

Pour les même raisons que plus haut, aG^0a^{-1} est la composante connexe de 1, donc $aG^0a^{-1} = G^0$. □

Théorème 3.1.9. *Soit G un groupe topologique compact. La composante connexe G^0 de G est l'intersection de tous les sous-groupes normaux ouverts de G.*

Preuve. [8], chapitre 2, théorème 4. □

3.2 Groupes de Lie

Nous rappelons ici la définition de groupe de Lie ainsi que quelques résultats utiles dans la suite. Pour plus de détails sur ce sujet, je suggère la lecture de [4].

Soient E un espace topologique, W un ouvert non vide de E et $n \in \mathbb{N}$. Si $\sigma : W \to X$ est un homéomorphisme de W dans un ouvert $X \subset \mathbb{R}^n$, nous dirons que σ est une carte de E ou plus précisément une carte sur W. Soient $p \in W$ et σ une carte sur W, nous avons un élément $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sigma(p) = x = (x_1, \ldots, x_n)$. Nous dirons que les x_i sont les coordonnées de p et n est la dimension de la carte σ.

Nous dirons qu'un espace topologique E est localement euclidien en p si et seulement s'il existe une carte sur un voisinage ouvert de p. Dans ce cas, nous dirons que σ est une carte en p. Si E est localement euclidien en chacun de ses points, nous dirons que E est localement euclidien.

Soient deux cartes $\sigma : W_1 \to X \subset \mathbb{R}^n$, $\tau : W_2 \to Y \subset \mathbb{R}^n$ (de même dimension) et $p \in W_1 \cap W_2$. Soit U un voisinage de p dans $W_1 \cap W_2$, notons $x = (x_i) := \sigma(p)$ et $y = (y_i) := \tau(p)$ et supposons que $\phi : X \to Y$ et son inverse ψ soient des homéomorphismes tels que :

$$\begin{cases} y = \phi(x) \text{ où } (x \in X) \\ x = \psi(y) \text{ où } (y \in Y). \end{cases}$$

Nous dirons qu'une fonction $f : X \to Y$ est analytique en un point $a \in X$ ssi elle peut être exprimée sur un voisinage de a comme une série convergente de puissances de $(x - a)$. Nous dirons que σ et τ sont analytiquement reliées en p ssi il existe de telles fonctions ϕ et ψ qui sont analytiques.

Nous dirons que σ et τ sont analytiquement reliées ssi elles le sont en tout point $p \in W_1 \cap W_2$.

Nous dirons qu'une famille $\mathscr{F}$ de cartes est analytique ssi toutes les cartes de $\mathscr{F}$ sont analytiquement reliées.

Définition 3.2.1. Une variété analytique est un espace topologique Hausdorff E muni d'une famille $\mathscr{F}$ de cartes de E telle que :

(i) en tout point de E, il y a une carte de $\mathscr{F}$,

(ii) $\mathscr{F}$ est une famille analytique maximale.

Définition 3.2.2. Nous dirons qu'un groupe topologique Hausdorff est un groupe de Lie s'il est de plus une variété analytique et que l'application $(x, y) \mapsto x.y : G \times G \to G$ est analytique.

Nous dirons qu'un groupe de Lie G est de dimension n si les cartes de la variété placée sur G sont de dimension n.

Exemple 3.2.3. Les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ définis dans le paragraphe précédent sont des groupes de Lie.

Nous admettrons quelques théorèmes sur les groupes de Lie.

Théorème 3.2.4 ([23], théorème 3.3.1)**.** *Soit G un groupe de Lie. Si H un sous-groupe fermé de G, alors H muni de la topologie induite par G est un groupe de Lie.*

Proposition 3.2.5. *Tout groupe de Lie compact a la DCC sur les sous-groupes fermés.*

Preuve. Si G est un groupe de Lie compact, alors tout sous-groupe fermé de G l'est aussi (par le théorème 3.2.4).

Du fait que G est muni d'une structure de variété analytique, nous pouvons trouver dans G un voisinage de l'identité qui est homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$. Ce voisinage U est donc connexe et est ainsi contenu dans G^0 la composante connexe de l'identité qui est un sous-groupe fermé de G. Comme G^0 contient un ouvert, il est d'intérieur non vide, et est lui-même ouvert (par le corollaire 3.1.3). Par conséquent, G^0 est le plus petit sous-groupe fermé de même dimension que G.

Par compacité, cette composante connexe est d'indice fini. Ainsi, G n'a pas de chaîne infinie descendante de sous-groupes fermés de même dimension. Comme G est de dimension finie, G a la DCC sur ses sous-groupes fermés. $\square$

Théorème 3.2.6 ([4], 6.6.4)**.** *Soit G un groupe de Lie et N un sous-groupe normal fermé de G. Alors le quotient G/N est un groupe de Lie.*

Le cinquième problème de Hilbert est de définir (au sein de la catégorie des groupes localement compacts) la notion de groupes de Lie sans hypothèse analytique, c'est à dire de manière totalement algébrique et topologique.

Une réponse à cette question fut apportée par A. Gleason dans l'article [7] et fut ensuite complétée par Montgomery et Zippin dans l'article [15]. Ces deux auteurs abordent le sujet de manière plus complète dans [16].

Cela donne le résultat suivant :

Définition 3.2.7. Nous dirons qu'un groupe topologique G n'a pas de petits sous-groupes ssi il existe un voisinage U de 1 tel que le seul sous-groupe $H \subset U$ de G est le groupe $\{1\}$.

Théorème 3.2.8 (Montgomery-Zippin [16], théorème 4.10)**.** *Soit G un groupe topologique, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est un groupe de Lie ;

(ii) G est localement euclidien ;

(iii) G est localement compact, sans petits sous-groupes.

3.3 Groupes compacts

Le but de ce paragraphe est d'étudier la structure des groupes compacts et d'en déduire que tout groupe compact est une limite projective de groupes de Lie compacts (corollaire 3.3.39). Ce résultat sera d'un grand secours dans la preuve de la proposition 6.1.4.

Nous appellerons groupe compact tout groupe topologique qui est de plus un espace topologique compact (Hausdorff).

Par exemple, le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. Soit une matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $A.A^t = 1$ entraîne que chaque ligne de la matrice est un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{R}$ ce qui établit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. En outre, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque du singleton fermé $\{1\}$ par l'application $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A.A^t$ qui est continue. Cela entraîne que O_n est fermé, ce qui achève de montrer que O_n est compact.

Il est également bien connu que le sous-groupe multiplicatif $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ de $\mathbb{C}^\times$ est compact, en effet, ce groupe est un sous-groupe fermé et borné de $(\mathbb{C}^\times, .)$. Une autre approche consiste à partir du fait que $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, une étude de la topologie quotient permet alors de montrer la compacité de $\mathbb{S}^1$.

Définition 3.3.1. Un morphisme de groupes topologiques est un morphisme de groupe $f : G \to H$ qui est continu. Nous dirons qu'un tel morphisme f est un isomorphisme ssi il possède un inverse qui est lui aussi un morphisme de groupes topologiques.

Définition 3.3.2. Nous dirons qu'un ensemble partiellement ordonné $(J, \leq)$ est dirigé si tout sous-ensemble fini de J possède une borne supérieure.

Définition 3.3.3. Soit J un ensemble dirigé. Un système projectif de groupes topologiques sur J est une famille $\{f_{jk} : G_k \to G_j \mid (j,k) \in J \times J, j \leq k\}$ de morphismes (continus) où les G_j sont des groupes topologiques et telle que :

(i) $f_{jj} = \mathrm{id}_{G_j}$ pour tout $j \in J$;

(ii) $f_{jk} \circ f_{kl} = f_{jl}$ pour tous $j, k, l \in J$ où $j \leq k \leq l$.

Lemme 3.3.4. *Soit un système projectif de groupes topologiques (noté comme dans la définition ci-dessus). Soient $P = \Pi_{j \in J} G_j$ (que nous munissons de la topologie produit) et $G = \{(g_j)_{j\in J} \in P : \forall j, k \in J,\ j \leq k \Rightarrow f_{jk}(g_k) = g_j\}$.*
G est un sous-groupe fermé de P. Notons $i : G \to P$ l'inclusion et $p_j : P \to G_j$ la projection. Nous obtenons des morphismes de groupes topologiques $f_j = p_j \circ i : G \to G_j$, tels que $j \leq k \Rightarrow f_j = f_{jk} \circ f_k$.

Preuve. Soient $j, k \in J$, $j \leq k$. Posons $G_{jk} := \{(g_l)_{l \in J} \in P : f_{jk}(g_k) = g_j\}$. Comme f_{jk} est un morphisme, $\{(g_j, g_k) \in G_j \times G_k : f_{jk}(g_k) = g_j\}$ est le graphe $\Gamma(f_{jk})$ d'une fonction continue et est donc fermé dans $G_j \times G_k$. Par conséquent, G_{jk} est un sous-groupe fermé de P. Nous pouvons écrire G sous la forme $\bigcap_{(j,k) \in J \times J, j \leq k} G_{jk}$, ce qui montre que G est un sous-groupe fermé de P. □

Nous possédons maintenant tous les outils nécessaires pour comprendre ce qu'est une limite projective de groupes topologiques :

Définition 3.3.5. Si $S = \{f_{jk} : G_k \to G_j \,|\, (j, k) \in J \times J, j \leq k\}$ est un système projectif de groupes topologiques. Soit le groupe G défini dans le lemme précédent, nous appellerons ce groupe la limite projective (ou limite inverse) de S est noté $\lim S$. La plupart du temps, si le contexte est suffisamment clair, nous dirons que G est la limite projective (inverse) des G_j et nous écrirons $G = \lim_{j \in J} G_j$.

Remarque 3.3.6. Si les $f_j : G \to G_j$ et les $f_{jk} : G_k \to G_j$ sont surjectives, nous dirons que S est un système projectif strict et que sa limite est une limite projective stricte.

Proposition 3.3.7. *Une limite projective de groupes compacts est compacte.*

Preuve. Par le théorème de Tychonoff, tout produit de groupes compacts est un groupe compact. La limite projective de groupes compacts est par conséquent un sous-groupe fermé d'un groupe compact et donc un groupe compact. □

Exemple 3.3.8. Soit p un nombre premier. Soient les groupes finis $G_n := \mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ munis de la topologie discrète. Ce sont bien sûr des groupes compacts. Nous allons définir des morphismes (continus) $(f_{jk} : G_k \to G_j)_{j \leq k}$ qui forment un système projectif de groupes compacts : $f_{jk}(z + p^k\mathbb{Z}) := z + p^j\mathbb{Z}$.

La limite de ce système projectif est souvent notée $\mathbb{Z}_p$ et est appelée le groupe des entiers p-adiques.

Proposition 3.3.9. *Soient G un groupe compact et $\mathcal{N}$ une base de filtres de sous-groupes normaux fermés telle que $\bigcap \mathcal{N} = \{1\}$. Pour tous $M \subset N \in \mathcal{N}$, posons $f_{NM} : G/M \to G/N : gM \mapsto g/N$. Nous avons un système projectif $(f_{NM})_{M \subset N}$ dont la limite est isomorphe à G (via $\phi : G \to \lim_{N \in \mathcal{N}} G/N : g \to (g.N)_{N \in \mathcal{N}}$). Sous cet isomorphisme, les f_N (définis comme dans le lemme 3.3.4) sont les projections canoniques $G \to G/N$.*

Preuve. La famille (f_{NM}) est un système projectif de groupes topologiques (pour tous sous-groupes distingués H est K de G, $(G/K)/(H/K) \simeq G/H)$. Nous allons vérifier que ϕ est un isomorphisme. Notons $L := \lim_{N \in \mathcal{N}} G/N$. Un élément $(g_n N)_{N \in \mathcal{N}} \in \Pi_{N \in \mathcal{N}} G/N$ est dans L ssi pour tous $N \subset M$, $f_{MN}(g_N N) = g_M M$, ou encore $g_M^{-1} g_N \in M$.
Donc, pour tout $g \in G$, $(gN)_{N \in \mathcal{N}} \in L$. De plus, $ker\phi = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \{1\}$.

Soit $\gamma := (g_N N)_N \in L$, $N \subset M \Rightarrow g_M^{-1}.g_N \in M$, ce qui entraîne $g_N \in g_M M \cap g_N N$. Ainsi, $\{g_N N : N \in \mathcal{N}\}$ est une base de filtres constituée d'ensembles fermés. Par compacité, $\bigcap \{g_N N : N \in \mathcal{N}\}$ est non vide. Soit g un élément de cette intersection, $g \in g_N N$ implique $gN = g_N N$ ce qui montre que $\phi(g) = \gamma$.
Ainsi, ϕ est un isomorphisme. Soient $p_N : G \to G/N$ la projection canonique et $f_N : L \to G/N : (g_N N)_N \to g_N N$, nous avons bien entendu $p_N = f_N \circ \phi$ ce qui termine la preuve. □

Pour utiliser cette proposition, nous allons chercher pour tout groupe compact une famille de morphismes dont les noyaux constitueront une base de filtres $\mathcal{N}$ de sous-groupes normaux fermés telle que $\bigcap \mathcal{N} = \{1\}$. C'est ce qui nous occupera jusqu'à la fin de ce chapitre.

Nous dirons qu'un groupe G agit sur un ensemble X s'il existe une fonction $G \times X \to (g, x) \mapsto gx$ telle que $1x = x$ et $g(hx) = (g.h)x$. Nous dirons de plus que l'action est transitive si $Gx = X$ pour tout $x \in X$.

Nous pouvons alors énoncer le lemme 3.1.1 de la façon suivante :

Lemme 3.3.10. *Soit G un groupe topologique. Le groupe des homéomorphismes de G agit transitivement sur G.*

On peut en particulier définir une action d'un groupe topologique sur un espace topologique :

Définition 3.3.11. Un groupe topologique G agit sur un espace topologique X s'il existe une fonction continue $G \times X \to X$ qui est une action de G sur l'ensemble X.

Définition 3.3.12. Soit $\mathbb{K}$ un corps topologique. Nous dirons qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est topologique si son groupe additif est topologique et que de plus, l'application $\mathbb{K} \times E \to E : (r, x) \mapsto r.x$ est continue.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons toujours que les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Soit E un espace vectoriel topologique. Une application linéaire continue $E \to E$ est appelée un endomorphisme de E (ou un opérateur continu de E). L'ensemble de tous les endomorphismes de E est noté $\mathrm{Hom}(E, E) \subset E^E$.

On le munit de la structure d'espace vectoriel topologique induite par celle de E^E. La convergence ainsi obtenue est la convergence ponctuelle, ce qui justifie que nous utiliserons également de la notation $\mathcal{L}_p(E)$ pour désigner cet espace.

Définition 3.3.13. Soient G un groupe topologique et E un espace vectoriel topologique.

(i) Nous dirons que E est un G-module si G agit sur l'ensemble E de telle manière que :

  (a) pour tout $g \in G$, $E \to E : x \mapsto gx$ est un endomorphisme continu de E,

  (b) pour tout $x \in E$, $G \to E : g \mapsto gx$ est continue.

(ii) Une représentation de G sur E est une application continue $\pi : G \to \mathcal{L}_p(E)$ qui satisfait $\pi(1) = \mathrm{id}_E$ et pour tous $g, h \in G$, $\pi(gh) = \pi(g).\pi(h)$.

Il faut faire attention, dans cette définition, l'action définie au point (i) n'est pas nécessairement continue.

Nous pouvons aisément constater que pour tout groupe topologique G et tout G-module E :

(i) la fonction $\pi : G \to \mathcal{L}_p(E)$ définie par $\pi(g)(x) = gx$ est une représentation de G sur E ;

(ii) si $\pi : G \to \mathcal{L}_p(E)$ est une représentation alors l'action $G \times E \to E$: $(g, x) \mapsto gx := \pi(g)(x)$ muni E d'une structure de G-module.

Les deux notions définies dans 3.3.13 sont donc équivalentes.

Nous admettrons le théorème 2.3 de [10] qui affirme entre autre que : *Si G est localement compact et E est un G-module qui de plus est un espace de Baire, alors la fonction $G \times E \to E : (g, x) \mapsto gx$ est continue.*
Nous en déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.14. *Soient G est un groupe compact et E un G-module qui est de plus un espace de Banach, le groupe compact G agit sur l'espace topologique E, c'est à dire que l'action $G \times E \to E$ est continue ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la définition 3.3.13.*

Définition 3.3.15. Un G-module E pour lequel π est injective (ou fidèle) est appelé fidèle.

Nous appellerons G-module de Banach un G-module qui de plus est un espace de Banach.

Exemple 3.3.16. Soient G un groupe compact et $E := C(G, \mathbb{R})$ muni de la norme définie par $||f|| := \sup_{t \in G} |f(t)|$. Cette norme fait de E un espace de Banach. On définit ${}_g f = \pi(g)(f)$ par ${}_g f = f(tg)$. Nous constatons alors que $\pi : G \to \mathcal{L}_p(E)$ est une représentation fidèle (c'est à dire injective) et que G agit sur E.

Pour tout groupe compact G, il existe un G-module de Banach fidèle. Nous verrons plus tard qu'il existe même un G-module de Hilbert qui est fidèle.

Le théorème que nous avons admis permet également de monter que :

Corollaire 3.3.17. *Si G est un groupe compact et E est un G-module de Banach, alors* $\sup\{||\pi(g)|| : g \in G\} < +\infty$.

Preuve. Voir [10], corollaire 2.5. □

Nous allons maintenant placer une mesure sur tout groupe compact G, une construction détaillé de cette mesure se trouve dans [10].

Définition 3.3.18. Soit un groupe compact G, une mesure de Haar sur G est une mesure σ-additive et non-nulle μ définie sur les boréliens (σ-algèbre engendrée par les ouverts) telle que

(i) pour tous ouvert $O \subset G$ et borélien $B \subset G$, $\mu(G) < +\infty$, $\mu(O) = \sup\{\mu(K) : K \subset O,\ K \text{ compact}\}$ et $\mu(B) = \inf\{\mu(O) | B \subset O,\ O \text{ ouvert}\}$;

(ii) μ est invariante par translation à droite : pour tout $g \in G$ et pour tout borélien B, $\mu(Bg) = \mu(B)$.

Cette mesure nous permet d'intégrer toute fonction continue $G \to \mathbb{R}$. Il résulte de l'invariance par translation que pour tout $g \in G$, $\int_{t \in G} f(tg)dt = \int_{t \in G} f(t)dt$.

Nous dirons qu'une mesure de Haar sur un groupe compact G est normalisée ssi $\mu(G) = 1$.

Théorème 3.3.19 ([10], théorème 2.8)**.** *Tout groupe compact admet une unique mesure de Haar normalisée.*

Théorème 3.3.20 (Weyl)**.** *Soit G un groupe compact et E un G module qui est de plus un espace de Hilbert. Il existe un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ pour lequel toutes les représentation $\pi(g)$ sont orthogonales : Si $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire existant par hypothèse sur E,*

$$\langle x | y \rangle = \int_{g \in G} (gx | gy) dg$$

défini un produit scalaire (sur E) tel que *(i) il existe un réel positif M tel que pour tout $x \in E$, $M^{-2}(x|x) \leq \langle x|y\rangle \leq M^2(x|x)$ et*

(ii) pour tous $x, y \in E$ et $g \in G$, $\langle gx|gy\rangle = \langle x|y\rangle$.

Preuve. Pour tous $x, y \in E$, par continuité de $G \to E : g \mapsto gx$ et du produit scalaire, $\langle x|y\rangle$ est bien défini. Il est évident que $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ puisque $(gx|gy) = (gy|gx)$. Il va également de soi que la linéarité de $x \mapsto (x|y)$ implique celle de $x \mapsto \langle x|y\rangle$ et que pour tous $g \in G, x \in E$, $(gx|gx) \geq 0$ implique $\langle x|x\rangle \geq 0$.

Par le corollaire 3.3.17, $M := \sup\{\sqrt{(gx|gx)} : g \in G, x \in E, (x|x) \leq 1\}$ existe et est bien sûr positif. Par définition, $\langle x|x\rangle = \int_{g\in G}(gx|gx)dg = \int_{g\in G}(x|x)(g\frac{x}{\sqrt{(x|x)}}|g\frac{x}{\sqrt{(x|x)}})dg \leq \int_{g\in G}(x|x)M^2dg = M^2(x|x)$ puisque $\mu(G) = 1$. De même, $(x|x) = (g^{-1}gx|g^{-1}gx) = (g^{-1}\frac{gx}{\sqrt{(gx|gx)}}|g^{-1}\frac{gx}{\sqrt{(gx|gx)}})(gx|gx) \leq M^2(gx|gx)$ ce qui implique que $\langle x|x\rangle = \int_{g\in G}(gx|gx)dg \leq \int_G M^{-2}(x|x)dg = M^{-2}(x|x)$. Ce qui prouve (i), qui lui même montre que $\langle x|y\rangle \geq 0$ implique que $x = 0$.

Soit $g \in G$, $\langle gx|gy\rangle = \int_G(tgx|tgy)dt = \int_G(tx|ty)dt = \langle x|y\rangle$. □

Définition 3.3.21. Soit G un groupe topologique. Nous appelons G-module de Hilbert un espace de Hilbert E qui est de plus un G-module tel que tous les opérateurs $\pi(g)$ sont orthogonaux c'est à dire :

$$\text{pour tous } x, y \in E \text{ et } g \in G,\ (gx|gy) = (x|y).$$

Lemme 3.3.22. *Module de Hilbert fidèle. Tout groupe compact possède un module de Hilbert fidèle, que nous noterons $L^2(G, \mathbb{R})$.*

Preuve. Soit G un groupe compact. Soit E l'espace vectoriel $C(G, \mathbb{R})$ des fonctions continues $G \to \mathbb{R}$. Commençons par vérifier que l'équation

$$(f_1|f_2) = \int_G f_1(g).f_2(g)dg$$

définit un produit scalaire sur E.

E est donc un espace préhilbertien. Nous noterons H sa complétion souvent appelée $L^2(G, H)$ qui est un espace de Hilbert. Nous allons prouver qu'il s'agit d'un G-module fidèle. Définissons $\pi(g)$ sur E par $\pi(g)(f) =_g f : t \mapsto f(t.g)$. En utilisant l'invariance de la mesure de Haar, on montre par le calcul suivant que ces opérateurs sont orthogonaux : $(\pi(g)f|\pi(g)f) = \int_G f(tg)f(tg)dt = \int_G f(t)f(t)dt = (f|f)$.

Tout opérateur orthogonal sur un espace préhilbertien s'étend de manière unique sur la complétion de cet espace. Nous noterons les extensions de ces opérateurs avec le même symbole $\pi(g)$.

La représentation π étant fidèle, elle fait de $L^2(G, \mathbb{R})$ un G-module de Hilbert fidèle.

Une preuve complète de ce résultat se trouve dans [10], exemple 2.12. $\square$

Soit E un espace de Hilbert. Nous dirons qu'un opérateur $T : E \to E$ est borné s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in E$, $||Tx|| = M||x||$. Une fonction $B : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite bornée ssi il existe une réel M tel que pour tous $x, y \in E$, $|B(x, y)| \leq M||x||.||y||$.

Lemme 3.3.23 ([10], lemme 2.14)**.** *Soit B une forme bilinéaire bornée dans un espace de Hilbert H. Il existe un unique opérateur borné T tel que $||T|| \leq M$ et $B(x, y) = (Tx|y)$.*

Lemme 3.3.24. *Soient G un groupe compact et T un opérateur borné sur un G-module de Hilbert E. Il existe un unique opérateur borné $\widetilde{T}$ sur E tel que $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$ et pour tous $x, y \in E$,*

$$(\widetilde{T}x|y) = \int_G (Tgx|gy)dg = \int_G (\pi(g)^{-1}T\pi(g)(x)|y)dg.$$

Preuve. Puisque π est une représentation orthogonale (définition 3.3.21), pour tout $g \in G$, $\pi(g)^*$ l'adjointe de $\pi(g)$ est $\pi(g)^{-1}$. Cela montre l'égalité entre les deux intégrales. $B(x, y) := \int_G (Tgx|gy)dg$ définit une fonction bilinéaire B. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par l'orthogonalité des $\pi(g)$, $|(Tgx|gy)| \leq ||Tgx||.||gy|| \leq ||T||.||gx||.||gy|| = ||T||.||x||.||y||$. Ce qui montre que B est borné : $|B(x, y)| \leq \int_G ||T||.||x||.||y||dg = ||T||.||x||.||y||$. Par le lemme 3.3.23, nous obtenons un opérateur borné $\widetilde{T}$ tel que $B(x, y) = (\widetilde{T}x|y)$ et $||\widetilde{T}|| \leq ||T||$. $\square$

L'opérateur $\widetilde{T}$ défini dans le lemme précédent peut être défini comme étant $\int_{g \in G} \pi(g)^{-1}T\pi(g)dg$. Cette approche est de loin beaucoup plus compliquée car elle nécessite de définir une telle intégrale. Nous nous limiterons donc au lemme.

Nous noterons $\mathrm{Hom}_G(E, E)$ les endomorphismes S de E (vu comme un espace vectoriel topologique) qui de plus satisfont : $\forall g \in G, x \in E, S(gx) = g(Sx)$. Autrement dit, ces opérateurs ont la propriété que $\forall g \in G, S\pi(g) = \pi(g)S$. Nous appellerons les éléments de $\mathrm{Hom}_G(E, E)$ des endomorphismes de G-module.

Lemme 3.3.25. *Soit $S \in Hom(E, E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $S \in Hom_G(E, E)$ *;*

(ii) $S = \widetilde{S}$;

(iii) *il existe* $T \in Hom_G(E,E)$ *tel que* $S = \widetilde{T}$.

Preuve. $(i) \to (ii)$: Soient $x, y \in E$, par définition, $(\widetilde{S}x|y) = \int_G (Sgx|gy)dg$. Par (i), nous savons également que $Sgx = gSx$, et comme E est un G-module de Hilbert, $(Sgx|gy) = (gSx|gy) = (Sx|y)$. Par conséquent, $(\widetilde{S}x|y) = \int_G (Sgx|gy)dg = \int_G (Sx|y) = (Sx|y)$ (car G est de mesure 1), ce qui entraîne que $S = (Sx|y)$.

$(ii) \to (iii)$: Evident.

$(iii) \to (i)$: Soient $x, y \in E, h \in G$, $(Shx|y) = (\widetilde{T}hx|y) = \int_G (Tghx|gy)dg = \int_G (Tghx|gh(h^{-1}y))dg$. Par invariance de la mesure de Haar (définition 3.3.18), $\int_G (Tghx|gh(h^{-1}y))dg = \int_G (Tgx|g(h^{-1}y))dg = (\widetilde{T}x|h^{-1}y) = (Sx|h^{-1}y)$. Et par le fait que E est un G-module de Hilbert, $(Sx|h^{-1}y) = (hSx|hh^{-1}y) = (hSx|y)$. Donc, pour tous $g \in G$ et $x \in E$, $S(gx) = g(Sx)$, ce qui veut bien dire que $S \in \mathrm{Hom}_G(E,E)$. □

Définition 3.3.26. Soient G un groupe topologique et E un G-module. Un sous-espace vectoriel V de E est appelé un sous-module de E ou encore un sous-espace invariant si $GV \subset V$.

Définition 3.3.27. Un opérateur $T : V \to V$ sur un espace de Banach est dit compact ssi pour tout sous-ensemble borné B de V, $\overline{TB}$ est compact. Il est dit positif ssi pour tout $x \in V$, $(Tx|x) \geq 0$ et T est autoadjoint c'est à dire : pour tous $x, y \in V$, $(Tx|y) = (x|Ty)$.

Proposition 3.3.28. *Toutes les valeurs propres d'un opérateur positif* T *sont positives.*

Preuve. Soit une valeur propre λ non nulle de T : nous avons $Tx = \lambda x$ avec $x \neq 0$. Nous obtenons que $(Tx|x) = (\lambda x|x) = \lambda(x|x) \geq 0$. Comme $(x|x) > 0$, $\lambda \geq 0$. □

Proposition 3.3.29. *Soient* E *un espace de Hilbert et* T *un opérateur positif compact non nul.* T *possède une plus grande valeur propre strictement positive* λ. *L'espace propre* E_λ *qui lui est associé est de dimension finie.*

Preuve. Soit $\lambda = ||T|| := \sup\{||Tx|| : x \in E, ||x|| \leq 1\}$. Par compacité de T, $s < +\infty$. Si λ est une valeur propre, λ sera nécessairement maximale (car nous pourrons toujours trouver un vecteur propre de longueur 1).

- $\lambda = \lambda' := \sup\{(Tx|y) = ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\}$:
  Pour tous $x, y \in E$, $(Tx|y) \leq |(Tx|y)| \leq ||Tx||.||y|| \leq ||Tx||$, ce qui montre que $\lambda' \leq \lambda$. De plus, $||Tx|| = ||Tx||^{-1}.(Tx|Tx) = (Tx|\frac{Tx}{||Tx||})$. En posant $y := \frac{Tx}{||Tx||}$, on obtient $||Tx|| = (Tx|y)$ avec $||y|| = 1$ ce qui implique $\lambda \leq \lambda'$.

– $\lambda = \lambda'' := \sup\{(Ty|y) : ||y|| \leq 1\}$:
  Nous avons directement par définition que $\lambda'' \leq \lambda' = \lambda$. Pour tous $x, y \in E$, $0 \leq (T(x-y)|x-y) = (Tx|x) + (Ty|y) - (Tx|y) - (Ty|x) = (Tx|x) + (Ty|y) - (Tx|y) - (Tx|y) = (Tx|x) + (Ty|y) - 2(Tx|y)$. Donc, $(Tx|y) \leq \frac{1}{2}(Tx|x) + \frac{1}{2}(Ty|y) \leq \max\{(Tx|x), (Ty|y)\}$, ce qui implique que $\lambda' \leq \lambda''$. Comme $\lambda = \lambda'$, $\lambda \leq \lambda''$.

Nous allons construire un vecteur propre de T de valeur λ. Comme $\lambda = \lambda''$, nous pouvons trouver une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ telle que $\lambda - 1/n < (Ty_n|y_n) \leq \lambda$ et $|y_n| \leq 1$. Quitte à remplacer y_n par $y_n/||y_n||$, on peut supposer que $||y_n|| = 1$. Par compacité de T, $(Ty_n)_n$ est contenue dans un compact, ce qui nous fournit une sous-suite $z_k = x_{n(k)}$ telle que $z := \lim_{k\in\mathbb{N}} Tz_k$ existe. Montrons que la suite $(\lambda.y_n)$ converge également vers z : $0 \leq ||Tz_k - \lambda z_k||^2 = ||Tz_k||^2 + \lambda^2||z_k||^2 - (Tz_k|\lambda z_k) - (\lambda z_k|Tz_k) \leq \lambda^2 + \lambda^2 - 2.\lambda(Tz_k|z_k) \leq 2\lambda^2 - 2\lambda(\lambda - \frac{1}{n}) = 2\frac{\lambda}{n}$. Par conséquent, les suites λz_k et Tz_k convergent vers le même point $z \in E$. De plus, comme T est un opérateur continu, $Tz = T(\lim \lambda z_k) = \lim T\lambda z_k = \lambda \lim Tz_k = \lambda z$. Nous savons également que $z \neq 0$ puisque nous avions supposé que $||z_k|| = 1$, ce qui montre bien z est un vecteur propre de valeur propre λ.

Pour finir, examinons la dimension de E_λ. Tout élément x de E_λ s'écrit $T(x/s)$. La boule unité de E_λ s'écrit $B := E_\lambda \cap B(0,1)$ où $B(0,1)$ désigne la boule unité de E. Donc, $B \subset TB(0, \frac{1}{s}) \subset \overline{TB(0, \frac{1}{s})}$ qui est compact par l'hypothèse faite sur T. Par conséquent $\overline{B}$ est compacte ce qui implique que E_λ est de dimension finie. □

Lemme 3.3.30. *Soient un G-module de Hilbert non nul E et $x \in E \setminus \{0\}$. Notons T la projection orthogonale sur $\mathbb{R}.x$. Alors $\widetilde{T} \in Hom_G(E, E)$ est un opérateur compact positif non nul.*

Preuve. [10], lemme 2.21. □

Théorème 3.3.31. *Tout G-module de Hilbert E pour un groupe compact G possède un sous-module non nul (invariant) de dimension finie.*

Preuve. Par le lemme 3.3.30, nous pouvons trouver un opérateur non nul, positif et compact $\widetilde{T}$ qui a la propriété que $\widetilde{T}gx = g\widetilde{T}x$ (voir 3.3.25). Par 3.3.29, $\widetilde{T}$ possède une valeur propre maximale $\lambda > 0$, dont l'espace propre associé E_λ est de dimension finie. Soit $x \in E_\lambda$, $\widetilde{T}x = \lambda.x$, donc $\widetilde{T}gx = g\widetilde{T}x = g(\lambda x) = \lambda gx$. Le sous-module cherché est donc E_λ. □

Ce théorème fondamental, va maintenant fournir de très beaux résultats qui nous mèneront à notre but. Désormais, nous supposons que G est un groupe compact et ce jusqu'à la fin du chapitre.

Définition 3.3.32. Un G-module E est dit simple s'il est non nul et ses seuls sous-modules invariants sont $\{0\}$ et E. Dans ce cas, nous dirons que la représentation correspondante de G est irréductible.

Corollaire 3.3.33. *Tout G-module de Hilbert non nul contient un G-module simple non nul de dimension finie.*

Preuve. Soit E un G-module de Hilbert. Par le théorème 3.3.31, il contient un sous-module E_0 de dimension finie. Toute chaîne descendante de sous-modules non nuls de E_0 est donc finie. Il s'en suit l'existence d'un G-module non nul minimal. Par minimalité, ce G-module est simple. □

Corollaire 3.3.34. *Tout G-module de Hilbert non nul est une somme directe de sous-modules simple de dimension finie qui sont orthogonaux deux à deux.*

Preuve. Soit E un G-module de Hilbert. Par le corollaire 3.3.33, l'ensemble des sous-modules simples de dimension finie est non vide. Par le lemme de Zorn, nous pouvons donc trouver une famille maximale $\mathfrak{M} = \{E_j : j \in J\}$ de sous-modules simples de dimension finie orthogonaux deux à deux (pour tous $j \neq k$, $E_j \perp E_k$). Soit H l'adhérence du sous-espace de E engendré par la famille $\mathfrak{M}$, c'est à dire $\bigoplus_{j\in J} E_j$. H est donc un G-module fermé de E, nous avons donc que $E = H \oplus H^\perp$. Si $H \neq E$, nous avons donc évidemment que $H^\perp$ est non nul. $H^\perp$ contient donc par le corollaire 3.3.33, un G-module simple non nul de dimension finie que nous nommerons K. Par conséquent, $\mathfrak{M} \cup \{K\}$ est une famille de sous-modules simples de dimension finie orthogonaux deux à deux ce qui contredit la maximalité de $\mathfrak{M}$. Donc, $H = E$. □

Définition 3.3.35. Une famille $\{E_j : j \in J\}$ de G-modules ou plus précisément une famille $\{\pi_j : j \in J\}$ de représentations sépare les points de G ssi pour tout $g \in G \setminus \{1\}$, il existe $j \in J$ tel que $\pi_j(g) \neq \mathrm{id}_{E_j}$.

Corollaire 3.3.36. *Les G-modules simples de dimension finie séparent les points de G.*

Preuve. Par le lemme 3.3.22, nous pouvons trouver un G-module de Hilbert fidèle et par le corollaire 3.3.34, $E = \bigoplus_{j\in J} E_j$ où les E_j sont des sous-modules simples de dimension finie de E. Soit $g \in G \setminus \{1\}$, il existe $x \in E$ tel que $gx \neq x$. Nous pouvons décomposer x dans la somme directe : $x = \sum_j x_j$. Nous obtenons donc $gx = g(\sum_j x_j) = \sum_j gx_j \neq \sum_j x_j$. Il existe donc bien un certain $j \in J$ tel que $gx_j \neq x_j$. □

Corollaire 3.3.37. *Les représentations orthogonales $\pi : G \to O_n$ séparent les points de G.*

Preuve. Par le théorème 3.3.20, nous pouvons trouver un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ pour lequel toutes les représentations sont orthogonales. Ainsi, les représentations orthogonales séparent les points de G. $\square$

Lemme 3.3.38. *Tout groupe compact est une limite projective d'un système projectif de sous-groupes fermés de groupes orthogonaux.*

Preuve. Soit G un groupe compact. Soit $\mathcal{N}$, l'ensemble de tous les noyaux de morphismes continus $f : G \to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Tous ces noyaux sont des sous-groupes normaux fermés (car image réciproque du singleton $\{1\}$ dans O_n). De plus, par le corollaire 3.3.37, $\bigcap \mathcal{N} = \{1\}$.
Montrons maintenant que $\mathcal{N}$ est une base de filtre. Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ et $f_i : G \to \mathrm{O}_{n_i}$ tels que $ker(f_i) = N_i$, les morphismes correspondants. Soit $j : \mathrm{O}_{n_1} \times \mathrm{O}_{n_2} \to \mathrm{O}_{n_1+n_2}$ définie par

$$(T_1, T_2) \mapsto \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

Le morphisme $f : G \to \mathrm{O}_{n_1+n_2} : g \mapsto j(f_1(g), f_2(g))$ a pour noyau $ker(f) = ker(f_1) \cap ker(f_2) = N_1 \cap N_2$. Par 3.3.9, $G = \lim_{N \in \mathcal{N}} G/N$. $\square$

Corollaire 3.3.39. *Tout groupe compact est une limite projective de groupes de Lie compacts.*

Preuve. Les groupes orthogonaux sont des groupes de Lie compacts, par conséquent, tous leurs sous-groupes fermés sont des groupes compacts et par le théorème 3.2.4, ils sont également des groupes de Lie. En appliquant le lemme précédent, on achève la preuve. $\square$

Nous sommes ainsi arrivé au résultat que nous souhaitions.

Voici pour l'information du lecteur un joli résultat qui caractérise précisément les groupes de Lie compacts :

Fait. Tout groupe de Lie compact est isomorphe (en temps que groupe topologique) à un sous-groupe (fermé) de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Pour une preuve de ce résultat, voir [10], corollaire 2.40.

Définition 3.3.40. Un espace topologique est dit localement connexe ssi pour tout point x et tout ensemble ouvert U contenant x, il existe un voisinage connexe V de x qui est contenu dans U.

Remarque 3.3.41. Il est évident que tout espace localement connexe n'est pas nécessairement connexe, par exemple, un espace discret (avec au moins deux points distincts) est toujours localement connexe, mais ne risque pas d'être connexe.

Les exemples d'espaces connexes non localement connexes, sont moins simples. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons E étant l'union de tous les segments joignant $(0,0)$ à $(1,1/n)$ et du segment joignant $(1/2,0)$ à $(1,0)$. L'espace E est connexe. Soit le point $x := (3/4,0)$ et $B(x,1/2)$ la boule ouverte de centre x et de rayon $1/2$. L'ouvert $U := E \cap B(x,1/2)$ de E contient x et ne contient aucun voisinage connexe de x. Il s'en suit que E n'est pas localement connexe.

Nous admettrons le résultat suivant dû à Pontryagin [22], chapitre 6, théorème 49. Il nous servira dans la preuve du théorème 6.1.3.

Fait 3.3.42. Soit G un groupe connexe, localement connexe, séparable[2], compact et commutatif. Alors G est un produit direct d'au plus $\aleph_0$ copies de $\mathbb{S}^1$ (le groupe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

[2] Espace topologique qui possède une base dénombrable.

Chapitre 4

Groupes définissables

Nous allons à nouveau nous placer dans une $\mathcal{L}$-structure o-minimale $\mathcal{M}$.

Soit $G \subset M^k$ un groupe (que nous noterons multiplicativement), nous dirons que G est définissable dans $\mathcal{M}$ si G est un sous-ensemble définissable (avec paramètres éventuels) de M^k et si le graphe de l'opération de G est un sous-ensemble définissable (avec paramètres éventuels) de M^{3k}. Cette définition entraîne directement que l'application inversion $G \to G : x \mapsto x^{-1}$ est définissable : si $x.y = z \leftrightarrow \phi(x, y, z)$, on a que $y = x^{-1} \leftrightarrow \phi(x, y, 1)$ et nous avons bien sûr que le neutre 1 est défini par la formule $\psi(x) \equiv \forall y \in G(y.x = x.y = y)$.

Nous supposons désormais, que G est définissable sur $\varnothing$. Au vu de la remarque 2.0.5, cette supposition n'est pas une perte de généralité. En effet, pour considérer un groupe G définissable sur A, il suffit d'ajouter dans le langage des symboles de constantes pour les éléments de A, ce qui fait de G un groupe $\varnothing$-définissable.

4.1 Dimension et groupes définissables

Voici maintenant quelques résultats qui relient la notion de dimension et les propriétés de la loi de groupe.

Lemme 4.1.1. *Soient G un groupe définissable dans $\mathcal{M}$ et $A \subset M$.*

(i) Soit $b \in G$ et soit a un point générique de G sur $A \cup \{b\}$. Alors $b.a$ est un point générique de G (sur $A \cup \{b\}$).

(ii) Pour tout $b \in G$, il existe dans G des points génériques b_1 et b_2 sur A tels que $b = b_1.b_2$.

Preuve. (i) La bijection $x \mapsto b.x$ est b-définissable. Par le lemme 2.4.10(i), $\dim(G) = \dim(a/A \cup \{b\}) = \dim(b.a/A \cup \{b\})$.

(ii) Soit b_1 un point générique de G sur $A \cup \{b\}$, nous savons que la bijection $x \mapsto x^{-1}$ est $\varnothing$-définissable, ce qui permet d'affirmer que b_1^{-1} est générique sur $A \cup \{b\}$. Par (i), on sait que $b_1^{-1}.b$ est générique sur $A \cup \{b\}$ et $b = (b_1).(b_1^{-1}.b)$ s'écrit donc comme produit de points génériques de G sur $A \cup \{b\}$.

□

Lemme 4.1.2. *Supposons que de plus $\mathcal{M}$ soit $\aleph_0$-saturée. Soit H un sous-groupe définissable de G. Alors* $\dim H = \dim G$ *si et seulement si H est d'indice fini dans G.*

Preuve. Pour tout $a \in G$, $\dim H = \dim a.H$ (car la multiplication par a est une bijection définissable). Si $\dim H = \dim G$ et H d'indice infini dans G, alors G est partitionné en une infinité de classes de dimension $\dim G$ ce qui contredit la proposition 2.4.12 (ici nous n'avons pas de paramètres, donc l'$\aleph_0$-saturation suffit). Réciproquement, si H est d'indice fini, $G = x_1H \cup \cdots \cup x_rH$. Par le lemme 2.4.10(ii), $\dim G = \max_{i=1,\ldots,r}(\dim(x_iH)) = \dim H$. □

Remarque 4.1.3. Soit $X \subset M$, l'ensemble $S_n(X)$ (défini dans le paragraphe 1.1) est muni d'une topologie qui a comme base d'ouverts, les ouverts-fermés $[\phi(\bar{x})] := \{p \in S_n(X) : \phi(\bar{x}) \in p\}$ où $\phi(\bar{x})$ est une formule à n variables libres et à paramètres dans X. Cela fait de $S_n(X)$ un espace compact.

Si $A \subset B$, $p \in S_n(A)$ et $q \in S_n(B)$, on note $q{\restriction}_A$ la restriction de q à A, c'est-à-dire l'ensemble des formules de q dont tous les paramètres sont dans A. Si $p = q{\restriction}_A$, nous dirons que q est une extension de p ou plus précisément une extension de p à B.

L'application $f : S_n(B) \to S_n(A) : p \mapsto p{\restriction}_A$ est continue. Si nous considérons un ouvert de base $[\phi(\bar{x})] \in S_n(A)$, $f^{-1}([\phi(\bar{x})]) = \{p \in S_n(B) : p{\restriction}_A \in [\phi(\bar{x})]\} = \{p \in S_n(B) : p{\restriction}_A \ni \phi(\bar{x})\} = \{p \in S_n(B) : p \ni \phi(\bar{x})\}$ ce qui est bien un ouvert par définition de la topologie sur $S_n(B)$.

Grâce aux objets étudiés dans cette longue remarque nous allons prouver le lemme suivant :

Lemme 4.1.4. *Soit $G \subset M^n$ un groupe définissable. Soient $\mathcal{M}_0$ une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$ et $A \subset M$. Supposons que $\mathcal{M}$ soit κ-saturée, avec $\kappa > |M_0 \cup A|$ un cardinal infini. Il existe un point générique c de G sur M_0 tel que tp$(c/M_0 \cup A)$ est finiment satisfaisable dans M_0.*

Preuve. Nous allons montrer que :
Soient $p \in S_n(M_0)$ et q une extension de p à $M_0 \cup A$ telle que $\mathrm{tp}(c/M_0 \cup A) = q$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour toute formule $\phi(\bar{x})$, telle que $\phi(\bar{x}) \in q$, alors il existe $\bar{m} \in M_0$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$;

(ii) le type q est dans la clôture topologique de l'ensemble $\{tp(\bar{a}/M_0 \cup A) : \bar{a} \subset M_0\}$ dans $S_n(M_0 \cup A)$.

Une extension q de p qui satisfait l'une de ces propriétés est appelée un cohéritier de p (voir [12], proposition 2.5).

Preuve de l'équivalence : $(i) \to (ii)$: $S_n(M_0 \cup A)$ a comme base d'ouverts les $[\phi(\bar{x})] := \{p \in S_n(M_0 \cup A) : \phi(\bar{x}) \in p\}$ où $\phi(\bar{x})$ est une formule à n variables libres et à paramètres dans $M_0 \cup A$. Soit un ouvert de base $[\phi(\bar{x})]$, si $q \in [\phi(\bar{x})]$, alors $\phi(\bar{x}) \in q$ et par (i), on a $\bar{m} \in M_0$ tel que $\phi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{m}/M_0 \cup A)$, c'est à dire $\mathrm{tp}(\bar{m}/M_0 \cup A) \in [\phi(\bar{x})]$ ce qui montre bien que q est dans l'adhérence de $\{\mathrm{tp}(\bar{a}/M_0 \cup A) : \bar{a} \subset M_0\}$.

$(ii) \to (i)$: Soit $\phi(\bar{x}) \in q \in S_n(M_0 \cup A)$, nous aurons bien sûr que $q \in [\phi(\bar{x})]$. Supposons que q soit dans la clôture topologique de $\{\mathrm{tp}(\bar{a}/M_0 \cup A) : \bar{a} \subset M_0\}$, il existe donc $\bar{m} \in M_0$ tel que $tp(\bar{m}/M_0 \cup A) \in [\phi(\bar{x})]$. De manière équivalente, $\phi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{m}/M_0 \cup A)$, ce qui montre que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m})$ et achève ainsi la preuve de l'équivalence souhaitée.

L'ensemble $F := \{p \in S_n(M_0 \cup A) : p$ est un cohéritier de $p\lceil_{M_0}\}$ est un ensemble compact (il est fermé par (ii) et il est donc compact car il est inclus à $S_n(M_0 \cup A)$ qui l'est également). L'application $f : F \to S_n(M_0) : p \mapsto p\lceil_{M_0}$ est continue. Par suite, $\mathrm{Im}(f)$ est compacte. Soit $\bar{a} \subset M_0^n$, $\mathrm{tp}(\bar{a}/M_0 \cup A) \in F$ et $\mathrm{tp}(\bar{a}/M_0) \in \mathrm{Im}(f)$. Nous avons ainsi que $E := \{\mathrm{tp}(\bar{a}) : \bar{a} \in M_0^n\} \subset \mathrm{Im}(f)$ et par conséquent l'adhérence de E qui est exactement $S_n(M_0)$ est aussi incluse à $\mathrm{Im}(f)$. f est donc surjective, ce qui prouve que tout type $p \in S_n(M_0)$ possède un cohéritier $q \in S_n(M_0 \cup a)$.

Prenons un point générique b de G sur M_0. Nous pouvons donc trouver dans $S_n(M_0 \cup A)$ un cohéritier q de $\mathrm{tp}(b/M_0)$. Soit c une réalisation de q dans G. Les points b et c satisfont le même type sur M_0, par 2.4.3, c est un point générique de G sur M_0. □

Lemme 4.1.5. *Soit $A \subset G$. Supposons ici que $\mathcal{M}$ soit λ-saturée pour un cardinal infini $\lambda > \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$. Soit X un sous-ensemble A-définissable et large dans G. Alors G est recouvert par un nombre fini de translatés de X.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ la sous-structure élémentaire engendrée par A. La cardinalité de M_0 est $\max\{|A|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$. Nous noterons $G(M_0) = G \cap M_0^k$. Nous allons montrer que :

$$\text{pour tout } a \in G \text{ il existe } b \in G(M_0) \text{ tel que } a \in b.X. \tag{L}$$

Soit c un point générique de G sur M_0 tel que $\mathrm{tp}(c/M_0 \cup a)$ est finiment satisfaisable dans M_0 (un tel c existe par le lemme 4.1.4).

Soient $c_1 \subset c$ un sous-uple maximal de c algébriquement indépendant sur M_0, et $a_1 \subset a$ un sous-uple maximal de a algébriquement indépendant sur M_0.

Sous-lemme. Le uple $a_1\hat{c}_1$ est algébriquement indépendant sur M_0.

Preuve. Par l'absurde, supposons que $a_1\hat{c}_1$ n'est pas algébriquement dépendant sur M_0, nous avons deux cas possibles.

- Il existe un élément a^* du uple a_1 tel que $a^* \in dcl(M_0 \cup a_1 \setminus \{a^*\} \cup c_1)$: c'est à dire que $\mathcal{M}$ satisfait une formule $\phi(a^*, m, a_1 \setminus \{a^*\}, c_1) \wedge \exists^{=1}x\ \phi(x, m, a_1 \setminus \{a^*\}, c_1)$ où m est un uple d'éléments de M_0. Comme le type de c sur $M_0 \cup a$ est finiment satisfaisable dans M_0, on a un uple $u \subset M_0$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(a^*, m, a_1 \setminus \{a^*\}, u) \wedge \exists^{=1}x\ \phi(x, m, a_1 \setminus \{a^*\}, u)$. Cela contredit l'indépendance de a_1 sur M_0.
- Il existe un élément c^* du uple c_1 tel que $c^* \in dcl(M_0 \cup a_1 \cup c_1 \setminus \{c^*\})$: Par le lemme 2.3.3, on peut échanger c^* avec un élément $a^* \in a_1$ ce qui donne $a^* \in dcl(M_0 \cup a_1 \setminus \{a^*\} \cup c_1)$ et nous ramène au cas précédent.

□

Par le sous-lemme, $\dim(\hat{ac}/M_0) = \dim(a/M_0) + \dim(c/M_0)$. Et par le lemme 2.4.2(iii), on a $\dim(c/M_0) = \dim(c/M_0 \cup a)$. Par conséquent, c est un point générique de G sur $M_0 \cup a$.

Comme X est large dans G, on a par le lemme 2.4.10(i) que $X.a^{-1}$ est large dans G ($\dim(G \setminus X.a^{-1}) = \dim(G \setminus X) < \dim G$). Par le lemme 2.5.3, on sait que $c \in X.a^{-1}$, et donc que $a \in c^{-1}.X$. Comme $\mathrm{tp}(c/M_0 \cup a)$ est finiment satisfaisable dans M_0, il existe $b \in G(M_0)$ tel que $a \in b.X$, ce qui prouve (L).

Par le théorème de compacité, il existe $b_1, \dots b_r \in G(M_0)$ tels que pour tout $a \in G$, $a \in \bigcup_{i=1}^r b_i X$. En effet, si cela est faux, pour tout $b_1, \dots, b_r \in G$, il existe $a \in G$, $a \notin \bigcup_{i=1}^r b_i X$. Soient les formules $\phi_b(x) \equiv (x \notin b.X)$. Le type $p(x) := \{\phi_b(x) : b \in G(M_0)\}$ est donc finiment satisfaisable et par compacité (et aussi par le fait que $\mathcal{M}$ est saturé), on peut trouver $a \in G$ tel que $a \notin \bigcup_{b \in G(M_0)} b.X$ ce qui contredit (L). □

4.2 Topologie sur un groupe définissable

Nous allons maintenant munir G d'une topologie qui en fait un groupe topologique et qui coïncide sur un ouvert dense dans G avec la topologie de M^k. Dans cette construction, nous n'utiliserons pas la saturation de $\mathcal{M}$. Ensuite, nous verrons que dans une structure suffisamment saturée, G ne peut pas posséder de chaîne infinie descendante de sous-groupes définissables.

Théorème 4.2.1 (Pillay, [19])**.** *Soit G un groupe $\varnothing$-définissable dans $\mathcal{M}$ de dimension n. Alors il existe un sous-ensemble V de G large et $\varnothing$-définissable et une topologie t sur G telle que :*

(i) $(G,.)$ *est un groupe topologique pour la topologie* t *;*

(ii) V *est une union finie d'ensembles* $\varnothing$*-définissables* $U_1, \ldots, U_r$ *tels que pour tout* $i = 1, \ldots, r$, U_i *est* t*-ouvert dans* G *et il existe un homéomorphisme* $\varnothing$*-définissable de* U_i *dans un ouvert* V_i *de* M^n.

Preuve. Nous allons construire un ensemble $V \subset G$ qui aura les propriétés souhaitées. Cette construction ne sera pas unique car elle découlera du théorème de décomposition cellulaire. Commençons par décomposer l'ensemble G en cellules $\varnothing$-définissables (grâce au théorème de décomposition 2.2.14). Soient $U_1, \ldots, U_r$ les cellules de dimension n, $V_0 := U_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} U_r$ est large dans G. Nous allons identifier les cellules U_i à des ouverts de M^n via un homéomorphisme définissable (comme dans la preuve de 2.2.9) et V_0 sera identifié à l'union de ces ouverts. Soit $f : G \to G : x \mapsto x^{-1}$. Rappelons que (par la définition 2.5.1 et par le lemme 2.5.3) :

(a) pour tout point générique a de G sur $\varnothing$, $\exists i, j$ tels que $a \in U_i$ et $a^{-1} \in U_j$;

(b) tout sous-ensemble de G définissable sur $\varnothing$ et de dimension n contient un point générique.

Remarquons qu'en vertu du lemme 2.4.10(i), $f^{-1}(V_0) = f^{-1}U_1 \cup \cdots \cup f^{-1}U_r$ est large dans G. On considère pour tous i, j les ensembles $U'_{i,j} := U_i \cap f^{-1}U_j$ où $j = 1, \ldots r$, dont l'union est large dans G. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, en appliquant le corollaire 2.2.18 à la fonction $f\restriction_{U'_{i,j}}$, on obtient une décomposition de $U'_{i,j}$ tel que sur chaque cellule de cette décomposition, f est continue. Notons U_i^j l'union de toutes les cellules qui décomposent $U'_{i,j}$ et qui sont de dimension n. Autrement dit, on ne garde que les cellules de dimension n et les autres sont supprimées, ce qui nous garantit que nous conserverons un ensemble large dans G :
Pour tout i, $\bigcup_{j=1}^{r} U_i^j$ est large dans U_i et l'inversion est une application continue $U_i^j \to U_j$. Soit $V_1 := \dot{\bigcup}_{i,j} U_i^j \subset G$ et muni de la topologie induite par celle de G.

(i) V_1 est large dans V_0 et l'inversion est une application continue $V_1 \to V_0$.

De même, en appliquant 2.2.18 à l'application $m : G^2 \to G : (x, y) \mapsto x.y$ restreinte à la préimage m^{-1}, on obtient un ensemble large et ouvert $Y_0 \subset V_0 \times V_0$ tel que :

(ii) m est une application continue $Y_0 \to V_0$.

Plus précisément, Y_0 est l'union disjointe d'ouverts $Y_{i,j}^k \in U_i \times U_j$ tels que $m\restriction_{Y_{i,j}^k}$ est continue et à valeurs dans U_k. Comme Y_0 est large dans $V_0 \times V_0$, il est aussi large dans $G \times G$. Le fait que Y_0 soit large est dû au fait que 4.1.1(i) implique que $m^{-1}(V_0)$ est large. Soit $V'_1 := \{a \in V_1$: pour tout point générique b de G sur a, $(b,a) \in Y_0$ et $(b^{-1}, b.a) \in Y_0\}$. Par 2.5.5, V_1' est $\varnothing$-définissable.

Fait 4. V_1' est large dans G.

Preuve. Si a est un point générique de G sur $\varnothing$, alors $a \in V_1$ (car V_1 est large et $\varnothing$-définissable). Soit b générique de G sur a. Par la proposition 2.5.8, (b,a) est un point générique de $G \times G$. Par 2.5.6, a est générique sur b et donc par 4.1.1, $b.a$ est générique sur b et est donc générique sur b^{-1}. b^{-1} et $b.a$ sont donc mutuellement génériques et on a donc $(b^{-1}, b.a)$ est un point générique de G. Comme (b,a) et $(b^{-1}, b.a)$ sont des points génériques de $G \times G$, ils sont des points de Y_0. $\square$

En décomposant à nouveau simultanément V_1' et les ensembles U_i à l'aide du théorème de décomposition cellulaire, et en supprimant toutes les cellules de dimension strictement inférieure à n, on obtient un ensemble $\varnothing$-définissable $V_2 \subset V_1'$ qui est ouvert dans V_0 et large dans G. Par (i), V_2^{-1} est ouvert dans V_0 et large dans G. Soit $V := V_2 \cap V_2^{-1}$. Alors $V = V^{-1}$ est ouvert dans V_0 et large dans G. De plus, $V \times V$ est ouvert dans $V_0 \times V_0$ et est large dans $G \times G$.

Soit $Y := (V \times V) \cap \{(a,b) \in Y_0 : a.b \in V\}$. Par (ii) et le fait que V soit ouvert dans V_0, Y est ouvert dans $V_0 \times V_0$. Comme pour tous a, b points mutuellement génériques de G, $(a,b) \in Y_0$ et $a.b \in V$ (car $a.b$ est générique), on a Y large dans $G \times G$.

Quitte à remplacer V par $(V \cap U_1) \cup \cdots \cup (V \cap U_r)$, nous allons supposer que $V = U_1 \dot\cup \ldots \dot\cup U_r$ (cela simplifiera les notations). Nous avons donc les propriétés suivantes :

(iii) V est une union disjointe d'ensembles ouverts $\varnothing$-définissables (qui sont les U_i) ;

(iv) V est large dans G ;

(v) Y est large dans $G \times G$ et $\varnothing$-définissable ;

(vi) l'inversion est une application continue et surjective $V \twoheadrightarrow V$;

(vii) Y est un ouvert dense (car il est large) dans $V \times V$ et la multiplication est une application continue $m : Y \to V$;

(viii) pour tout $a \in V$, si b est un point générique de V sur a, alors $(b,a) \in Y$ et $(b^{-1}, b.a) \in Y$.

Lemme 4.2.2. *(a) Pour tous $a, b \in G$, l'ensemble $Z := \{x \in V : a.x.b \in V\}$ est ouvert dans V et l'application $x \mapsto a.x.b$ est un homéomorphisme $Z \to a.Z.b$*

(b) Pour tous $a, b \in G$, l'ensemble $Z := \{(x, y) \in V \times V : a.x.b.y \in V\}$ est ouvert dans $V \times V$ et $(x, y) \mapsto a.x.b.y$ et une application continue $Z \to V \times V$.

Preuve. (a) Soit $x_0 \in Z$, nous allons montrer qu'il existe un ouvert $Z_0 \subset Z$ qui contient x_0 et telle que de plus, $x \mapsto a.x.b$ est continue sur Z_0. Par le lemme 4.1.1, on peut écrire $b = b_1.b_2$ où $b_1, b_2 \in V$ sont des points génériques (tous les points génériques sont dans V puisque V est large). Soit c un point générique de G sur $\{a, x_0, b_1, b_2\}$, on a que c et $c.a \in V$ (par le lemme 4.1.1).
Soit l'ensemble $Z_0 = \{x \in V : (c.a, x) \in Y, (c.a.x, b_1) \in Y, (c.a.x.b_1, b_2) \in Y$ et $(c^{-1}, c.a.x.b_1.b_2) \in Y\}$.

1. Montrons que $Z_0 \subset Z$: Soit $x \in Z_0$, $x \in V$ et comme $(c^{-1}, c.a.x.b_1.b_2) \in Y$, $axb \in V$.
2. Montrons que $x_0 \in Z_0$:
   - $x_0 \in Z \Rightarrow x_0 \in V$. De plus, $V \subset V_2 \subset V_1'$. Donc pour tout point générique g de G sur x_0, $(g, x_0) \in Y_0$. Si de plus, $g.x_0 \in V$, $(g, x_0) \in Y$.
   - c est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\} \Rightarrow c.a$ est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\}$ ($\Rightarrow c.a$ est générique sur $\{x_0\}$) $\Rightarrow c.a.x_0$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\}$ $\Rightarrow c.a.x_0 \in V$. Donc, $(ca, x_0) \in Y$.
   - $c.a.x_0 \in V$ et est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1 \in V$. Comme b_1 est générique sur $\varnothing$, $(c.a.x_0, b_1) \in Y$.
   - $c.a.x_0.b_1 \in V$ et est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2 \in V$. Comme b_2 est générique sur $\varnothing$, $(c.a.x_0.b_1, b_2) \in Y$.
   - c^{-1} est générique sur $\varnothing$ (car $x \mapsto x^{-1}$ est une bijection définissable). Nous savons également que $c.a.x_0.b_1.b_2$ est donc un point générique sur $\varnothing$. Donc $(c^{-1}, c.a.x_0.b_1.b_2) \in Y_0$.
     Comme $x_0 \in Z$, $c^{-1}.c.a.x_0.b_1.b_2 = ax_0b \in V$ ce qui montre que $(c^{-1}, c.a.x_0.b_1.b_2) \in Y$.
3. Montrons que Z_0 est ouvert dans V :
   Nous allons montrer que pour tout $x_1 \in Z_0$, il existe un ouvert $O \subset Z_0$ qui contient x_1.
   Nous savons déjà que V est ouvert. Comme Y est lui aussi ouvert, et par (vii) :
   - il existe des ouverts $O_1, O_2 \subset V$ tels que $O_1 \times O_2 \subset Y$ et $(c.a, x_1) \in O_1 \times O_2$. En particulier, $x_1 \in O_2$ et $\forall x \in O_2$, $(ca, x) \in O_1 \times O_2$.

- il existe des ouverts $O_1^*, O_2^* \subset V$ tels que $O_1^* \times O_2^* \subset Y$ et $(c.a.x_1, b_1) \in O_1^* \times O_2^*$. Par conséquent, $cax_1 \in O_1^*$ et comme $\cdot$ est continue $Y \to V$, il existe un ouvert $O_1' \ni x_1$ tel que $\forall y \in O_1'$, $c.a.y \in O_1^*$.
- il existe des ouverts $O_1^{**}, O_2^{**} \subset V$ tels que $O_1^{**} \times O_2^{**} \subset Y$ et $(cax_1b_1, b_2) \in O_1^{**} \times O_2^{**}$. En particulier, $c.a.x_1.b_1 \in O_1^{**}$ et par continuité de la multiplication (voir (vii)), $Y \to V : cax, b_1 \mapsto caxb_1$ est continue et donc il existe un ouvert O_1'' tel que $\forall y \in O_1''$, $cayb_1 \in O_1^{**}$.
- il existe des ouverts $O_1^{***}, O_2^{***} \subset V$ tels que $O_1^{***} \times O_2^{***} \subset Y$ et $(c^{-1}, cax_1b_1b_2) \in O_1^{***} \times O_2^{***}$. Nous avons donc que $cax_1b_1b_2 = cax_1b \in O_2^{***}$. Par continuité de la multiplication $Y \to V$,
  $(c^{-1}, caxb_1b_2) \mapsto axb$ est continue, ce qui entraîne l'existence d'un ouvert $O_2''' \ni x_1$ tel que $\forall y \in O_2'''$, $cayb \in O_2^{***}$.

L'ouvert O cherché est donc $O_2 \cap O_1' \cap O_1'' \cap O_2'''$. Par conséquent Z_0 est ouvert dans V.

4. Par (vii), $x \mapsto axb (= c^{-1}.c.a.x.b_1.b_2)$ est continue $Z \to a.Z.b$.

(b) Nous allons faire une preuve tout à fait similaire à celle de (a).
Soit $(x_0, y_0) \in Z$, nous allons montrer qu'il existe un ouvert $Z_0 \subset Z$ qui contient (x_0, y_0) et telle que de plus, $(x, y) \mapsto a.x.b.y$ est continue sur Z_0. Par le lemme 4.1.1, on peut écrire $b = b_1.b_2$ où $b_1, b_2 \in V$ sont des points génériques (tous les points génériques sont dans V puisque V est large). Soit c un point générique de G sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\}$, on a que c et $c.a \in V$ (par le lemme 4.1.1).
Soit l'ensemble $Z_0 = \{(x, y) \in V \times V : (c.a, x) \in Y, (c.a.x, b_1) \in Y, (c.a.x.b_1, b_2) \in Y, (c.a.x.b_1.b_2, y) \in Y$ et $(c^{-1}, c.a.x.b_1.b_2.y) \in Y\}$.

1. Montrons que $Z_0 \subset Z$: Soit $(x, y) \in Z_0$, $(x, y) \in V \times V$ et comme $(c^{-1}, c.a.x.b_1.b_2.y) \in Y$, $axby \in V$.
2. Montrons que $x_0 \in Z_0$:
   - $(x_0, y_0) \in Z \Rightarrow x_0 \in V$ et $y_0 \in V$. De plus, $V \subset V_2 \subset V_1'$. Donc pour tout point générique g de G sur x_0, $(g, x_0) \in Y_0$. Si de plus, $g.x_0 \in V$, $(g, x_0) \in Y$.
     De même, pour tout point générique g de G sur y_0, $(g, y_0) \in Y_0$ et si $g.y_0 \in V$, $(g, y_0) \in Y$.
   - c est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\}$
     $\Rightarrow c.a$ est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\}$ ($\Rightarrow c.a$ est générique sur $\{x_0\}$) $\Rightarrow c.a.x_0$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\} \Rightarrow c.a.x_0 \in V$. Donc, $(ca, x_0) \in Y$.
   - $c.a.x_0 \in V$ et est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1 \in V$. Comme b_1 est générique sur $\varnothing$, $(c.a.x_0, b_1) \in Y$.

- $c.a.x_0.b_1 \in V$ et est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\} \Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2 \in V$. Comme b_2 est générique sur $\varnothing$, $(c.a.x_0.b_1, b_2) \in Y$.
- $c.a.x_0.b_1.b_2 \in V$ et est générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\}$ ($\Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2$ générique sur $\{y_0\}$) $\Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2.y_0$ générique sur $\{a, x_0, b_1, b_2, y_0\}$ $\Rightarrow c.a.x_0.b_1.b_2.y_0 \in V$. Donc, $(c.a.x_0.b_1.b_2, y_0) \in Y$.
- c^{-1} est générique sur $\varnothing$ (car $x \mapsto x^{-1}$ est une bijection définissable). Nous savons également que $c.a.x_0.b_1.b_2.y_0$ est générique sur $\varnothing$. On en déduit que $(c^{-1}, c.a.x_0.b_1.b_2.y_0) \in Y_0$.
  Comme $(x_0, y_0) \in Z$, $c^{-1}.c.a.x_0.b_1.b_2.y_0 = ax_0by_0 \in V$ ce qui montre que $(c^{-1}, c.a.x_0.b_1.b_2.y_0) \in Y$.

3. Montrons que Z_0 est ouvert dans V :
   Nous allons montrer que pour tout $(x_1, y_1) \in Z_0$, il existe un ouvert $O \subset Z_0$ qui contient (x_1, y_1).
   Nous savons déjà que V est ouvert. Comme Y est lui aussi ouvert, et par (vii) :
   - il existe des ouverts $O_1, O_2 \subset V$ tels que $O_1 \times O_2 \subset Y$ et $(c.a, x_1) \in O_1 \times O_2$. En particulier, $x_1 \in O_2$ et $\forall x \in O_2$, $(ca, x) \in O_1 \times O_2$.
   - il existe des ouverts $O_1^*, O_2^* \subset V$ tels que $O_1^* \times O_2^* \subset Y$ et $(c.a.x_1, b_1) \in O_1^* \times O_2^*$. Par conséquent, $cax_1 \in O_1^*$ et comme $\cdot$ est continue $Y \to V$, il existe un ouvert $O_1' \ni x_1$ tel que $\forall \tilde{x} \in O_1'$, $c.a.\tilde{x} \in O_1^*$.
   - il existe des ouverts $O_1^{**}, O_2^{**} \subset V$ tels que $O_1^{**} \times O_2^{**} \subset Y$ et $(cax_1b_1, b_2) \in O_1^{**} \times O_2^{**}$. En particulier, $c.a.x_1.b_1 \in O_1^{**}$ et par continuité de la multiplication (voir (vii)), $Y \to V : cax, b_1 \mapsto caxb_1$ est continue et donc il existe un ouvert O_1'' tel que $\forall \tilde{x} \in O_1''$, $ca\tilde{x}b_1 \in O_1^{**}$.
   - il existe des ouverts $O_1^{***}, O_2^{***} \subset V$ tels que $O_1^{***} \times O_2^{***} \subset Y$ et $(cax_1b_1b_2, y_1) \in O_1^{***} \times O_2^{***}$. En particulier, $c.a.x_1.b_1.b_2 \in O_1^{***}$ et par continuité de la multiplication (voir (vii)), $Y \to V : caxb_1, b_2 \mapsto caxb_1b_2$ est continue. Donc il existe des ouverts O_1''' et O_2''' tels que $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in O_1''' \times O_2'''$, $ca\tilde{x}b_1b_2 \in O_1^{***}$ et $\tilde{y} \in O_2^{***}$.
   - il existe des ouverts $O_1^{****}, O_2^{****} \subset V$ tels que $O_1^{****} \times O_2^{****} \subset Y$ et $(c^{-1}, cax_1b_1b_2y_1) \in O_1^{****} \times O_2^{****}$. Nous avons donc que $cax_1b_1b_2y_1 = cax_1by_1 \in O_2^{****}$. Par (vii), $(c^{-1}, caxb_1b_2y) \mapsto axby$ est continue, ce qui entraîne l'existence d'ouverts $O_1'''' \ni x_1$ et $O_2'''' \ni y_1$ tels que $\forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in O_1'''' \times O_2''''$, $ca\tilde{x}b\tilde{y} \in O_2^{****}$.

   L'ouvert O cherché est donc $(O_2 \cap O_1' \cap O_1'' \cap O_1''' \cap O_1'''') \times (O_2''' \cap O_2'''')$. Par conséquent Z_0 est ouvert dans V.

4. Par (vii), $x \mapsto axby (= c^{-1}.c.a.x.b_1.b_2.y)$ est continue $Z \to V$.

□

Nous allons maintenant définir la topologie t :

Définition 4.2.3. Sur V est placée la topologie induite de la topologie de M^k Nous dirons qu'un ensemble $Z \subset G$ est t-ouvert ssi pour tout $g \in G$, $(g.Z) \cap V$ est ouvert dans V.

Dans le cas où $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-saturé, nous savons par le lemme 4.1.5 qu'un nombre fini de translatés de V recouvrent G, nous avons donc $a_1, \ldots a_l \in G$ tels que $Z \subset G$ est t-ouvert ssi $\bigwedge_{i=1}^{l}$ ($a_i Z \cap V$ est ouvert dans V) ce qui s'exprime facilement au premier ordre dans le cas où Z est définissable[1].

Proposition 4.2.4. *Soit $Z \subset V$ et $a \in G$. $a.Z$ est t-ouvert ssi Z est ouvert dans V.*

Preuve. Si $a.Z$ est t-ouvert, alors, par définition, $(a^{-1}.(a.Z)) \cap V = Z$ est ouvert dans V. Inversement, si Z est ouvert dans V, pour tout $g \in G$, $g.(aZ) \cap V = (g.a).Z \cap V$ est ouvert par le lemme 4.2.2(a) et donc $a.Z$ est t-ouvert. $\square$

En particulier, nous pouvons donc dire que $Z \subset V$ est t-ouvert ssi Z est ouvert dans V.

Pour la facilité des notations de la preuve suivante, nous allons supposer que $G = a_1 V \cup \cdots \cup a_l V$ ($a_i \in G$). Cela nécessiterais de pouvoir utiliser le lemme 4.1.5 et par conséquent que $\mathcal{M}$ soit saturée. Dans le cas où $\mathcal{M}$ n'est pas saturée, il suffit d'écrire $G = \bigcup_{a \in G} a.V$ et $W = \bigcup_{a \in G} (W \cap aV)$ et de montrer que tous les $W \cap aV$ sont ouverts ce qui est fait dans la preuve.

Proposition 4.2.5. *L'inversion est un t-homéomorphisme sur G.*

Preuve. Soit W un t-ouvert. Comme V est large dans G, on a que $G = a_1 V \cup \cdots \cup a_l V$ ($a_i \in G$). On a donc $W = (W \cap a_1 V) \cup \cdots \cup (W \cap a_l V)$ et par la proposition 4.2.4, tous les $a_i V$ sont t-ouverts et donc tous les $W \cap a_i V$ sont t-ouverts. $W^{-1} = (W \cap a_1 V)^{-1} \cup \cdots \cup (W \cap a_l V)^{-1}$. Montrons donc que pour tous $a \in G$ et $W \subset a.V$, W t-ouvert entraîne W^{-1} t-ouvert, et cela suffira pour montrer la propriété. Par la proposition 4.2.4, $a^{-1}.W$ est ouvert dans V (car $W = a(a^{-1}W)$ est t-ouvert). Par le lemme 4.2.2(a), pour tout $g \in G$, $gW^{-1} \cap V = g(W^{-1}a)a^{-1} \cap V$ est ouvert dans V. Donc, par définition de la topologie t, W^{-1} est t-ouvert. $\square$

L'abus de notations commis dans cette démonstration sera reproduit dans la preuve de la propriété suivante : pour travailler en toute généralité, on doit remplacer $\bigcup_{i,j=1}^{l} (a_i.V \times a_j.V)$ par $\bigcup_{a,b \in G} (a.V \times b.V)$.

---

[1]Le fait qu'un ensemble $D \subset M^k$ soit ouvert est équivalent à $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in D$, $\exists a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$, $\bigwedge_{i=1}^{k} (a_i < x_i < b_i) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (a_i < y_i < b_i \rightarrow (y_1, \ldots, y_k) \in D)$.

Proposition 4.2.6. *La multiplication est une application t-continue $G \times G \to G$.*

Preuve. Soit W un ensemble t-ouvert dans G, montrons que $\{(x,y) \in G \times G : x.y \in W\}$ est t-ouvert dans $G \times G$. Comme dans la preuve de la proposition 4.2.5, on peut sans perte de généralité supposer que $W \subset c.V$ où $c \in G$. De plus, $G \times G = \bigcup_{i,j=1}^{l} (a_i.V \times a_j.V)$ union d'ensembles t-ouverts dans $G \times G$. On en déduit que $\{(x,y) \in G^2 : x.y \in W\} = \bigcup_{i,j=1}^{l} \{(x,y) \in a_i.V \times a_j.V : x.y \in W\}$. Cela montre qu'il est amplement suffisant de montrer que pour tous $a, b \in G$, $Z := \{(x,y) \in aV \times b.V : x.y \in W\}$ est t-ouvert. $Z = \{(a.w, b.z) \in G^2 : (w,z) \in V^2$ et $c^{-1}.a.x.b.y \in c^{-1}.W\}$. Comme $c^{-1}.W \subset V$, le lemme 4.2.2(b) et la proposition 4.2.4 nous donnent que Z est t-ouvert. □

$(G, .)$ muni de la topologie t est donc un groupe topologique, ce qui achève la preuve du théorème. □

La topologie t ainsi définie semble dépendre de l'ensemble $V \subset G$ qui n'est pas plus unique que la décomposition cellulaire dont il découle. Il n'en est rien ! Nous allons montrer que cette topologie est indépendante de l'ensemble V qui sert à la définir. Soient deux ensembles $V, V' \subset G$ qui sont construits comme dans la preuve de 4.2.1. Il définissent des topologies sur G que nous appellerons respectivement t et t' (voir preuve de 4.2.1). Soit $Z \subset G$, nous allons tenter de prouver que Z est t-ouvert ssi Z est t'-ouvert. L'ensemble $V \cap V'$ possède toutes les bonnes propriétés (large, $\varnothing$-définissable,...) pour être obtenu de la même manière que V dans 4.2.1. Nous pouvons donc sans perte de généralité supposer que $V' \subset V$.

- Si Z est t-ouvert, alors pour tout $a \in G$, $a.Z \cap V$ est ouvert dans V. Donc $a.Z \cap V' = (a.Z \cap V) \cap V'$ est ouvert dans V'.
- Si Z est t'-ouvert, nous pouvons recouvrir G par des translatés de V' : $G = \cup_{i \in I} b_i V'$. Pour tout $a \in G$, $a.Z \cap V = \cup_{i \in I} (a.Z \cap b_i V' \cap V) = \cup_{i \in I} b_i (b_i^{-1}.a.Z \cap V' \cap b_i^{-1} V)$.
  Nous avons clairement que pour tout i, $b_i^{-1}.a.Z$ est t'-ouvert (car Z est t'-ouvert et G est un groupe topologique pour t'), V' est t'-ouvert et $b_i^{-1} V$ est t'-ouvert (car il est t-ouvert).
  Par conséquent, l'intersection $S_i := b_i^{-1}.a.Z \cap V' \cap b_i^{-1} V$ de ces trois ensembles est t'-ouverte et incluse à V'. Donc S_i est ouvert dans V' et par conséquent l'est aussi dans V, ce qui prouve que S_i est t-ouvert. Comme G est un groupe topologique pour la topologie t, $b_i.S_i$ est t-ouvert. Ainsi, $a.Z \cap V = \cup_{i \in I} (b_i.S_i)$ est t-ouvert et donc ouvert dans V (car tout sous-ensemble de V qui est t-ouvert est ouvert dans V).

Cet argument établit bien l'indépendance de t par rapport à V.

Exemple 4.2.7. Soit la structure o-minimale $(\mathbb{R}, <, +, ., 0, 1)$. Nous considérons l'intervalle $G := [0, 1[\subset \mathbb{R}$. On place sur G la loi suivante :

$$x * y := \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \in [0, 1[\\ x + y - 1 & \text{si } x + y \notin [0, 1[. \end{cases}$$

Cette loi fait de G un groupe définissable dans $(\mathbb{R}, <, +, ., 0, 1)$.

Avec la topologie induite de $\mathbb{R}$, la loi de groupe n'est pas continue : La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/2 - 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers $1/2$, mais la suite $(1/2 * x_n)_n = (1/2 + x_n)_n$ ne converge pas dans G puisque sa valeur de convergence dans $\mathbb{R}$ est $1 \notin G$.

Pour obtenir un groupe topologique, nous aurons donc recours à la t-topologie. Soit $V :=]0, 1[$, V est large, $\varnothing$-définissable et ouvert dans G. Nous définissons donc que Z est t-ouvert ssi pour tout $g \in G$, $g.E \cap V$ est ouvert dans V. Dans ce cas bien particulier, deux translatés de V suffisent à recouvrir G. Pour montrer la continuité des la loi de G et de son inverse, il suffit de répéter exactement les même arguments que ceux des preuves de 4.2.5 et 4.2.6.

Définition 4.2.8. Nous appellerons variété définissable un ensemble X définissable dans $\mathcal{M}$ et muni d'une famille d'ouverts $U_1, ..., U_r$ tels que

(i) $X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$;

(ii) pour tout i, il existe une bijection définissable $f_i : U_i \to V_i$ où V_i est un ouvert dans M^n ;

(iii) pour tous $i \neq j$, $f_i(U_i \cap U_j)$ et $f_j(U_i \cap U_j)$ sont des ouverts définissables de V_i et V_j

(iv) pour tous i, j, il existe un homéomorphisme définissable de V_i dans V_j.

Remarque 4.2.9. Il se fait que le théorème fraîchement démontré fournit une construction d'une variété définissable sur G qui de plus en fait un groupe topologique. Supposons que la structure o-minimale en question soit le corps réel clos $(\mathbb{R}, <, +, ., 0, 1)$, l'ensemble V est alors homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (via une application définissable). Le groupe topologique G muni de la topologie t est ainsi un groupe localement euclidien (puisqu'on le recouvre par des translatés de V) et par la solution du 5$^{\text{e}}$ problème de Hilbert (voir théorème 3.2.8), G est un groupe de Lie.

Nous allons maintenant étudier cette t-topologie et en exploiter les magnifiques propriétés. Nous supposerons jusqu'à la fin du paragraphe en cours que $\mathcal{M}$ est $\aleph_0$-saturée.

Lemme 4.2.10. *Tout ensemble définissable $Z \subset G$ est une union finie d'ensembles définissables t-localement fermés dans G.*

Preuve. Tout sous-ensemble définissable de V est une union de cellules que nous savons être localement fermées dans M^k (voir proposition 2.2.8). Ces cellules sont donc t-localement fermées (car la topologie t et la topologie de M coïncident sur V).
Nous savons qu'un nombre fini de translatés de V recouvrent G, ainsi $Z = (Z \cap a_1.V) \cup \cdots \cup (Z \cap a_n.V)$. Chaque morceau $Z \cap a_i.V$ est t-homéomorphe à un sous-ensemble de V (car la translation dans un groupe topologique est un homéomorphisme) et est donc une union finie d'ensembles définissables t-localement fermés de G. □

Proposition 4.2.11. *Tout sous-ensemble définissable de G est une combinaison booléenne d'ouverts.*

Preuve. Par le lemme précédent et la proposition 2.2.4. □

Le lemme suivant s'inspire de [24], 1.4, il nous permettra de prouver le lemme 4.2.14.

Soient $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ des ouverts de G et pour tout $\beta \subset \{1, \ldots, n\}$, nous noterons B_β l'intersection des A_j pour les $j \in \beta$ et des $A_j^c = G - A_j$ pour les $j \notin \beta$.

Lemme 4.2.12. *Soit S sous-ensemble non vide de G. Il existe $\beta \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que $S \cap B_\beta$ est ouvert non vide.*

Preuve. Si $n = 1$, considérons $A_1 \cap S$. S'il est non vide, prendre $\beta = \{1\}$. Sinon $A_1^c \cap S = S$ est donc ouvert non vide dans S. Prendre $\beta = \varnothing$.
Supposons que le lemme soit vrai pour tous $n \leq k$. Soient $A_1, \ldots, A_{k+1}$ des ouverts de G. S est d'intersection non vide ouverte avec un B_α où $\alpha \subset \{1, \ldots, k\}$. Notons $I = S \cap B_\alpha$. Si $I \cap A_{k+1}$ est non vide, on prend $\beta = \alpha \cup \{k+1\}$. Sinon, $I \cap A_{k+1} = \varnothing$. Donc, $I \subset A_{k+1}^c$ et en prenant $\beta = \alpha$, on obtient $B_\beta \cap S$ qui est non vide et ouvert. □

Corollaire 4.2.13. *Soit E une combinaison booléenne d'ouverts. E ou E^c est d'intérieur non vide dans S.*

Preuve. Comme E est une combinaison booléenne d'ouverts $A_1, \ldots, A_n$, disons $E = B_\beta$. Si E n'est pas ouvert d'intérieur vide, alors il existe $\gamma \subset \{1, \ldots, n\}$ tel que B_γ est un ouvert non vide dans S. Comme $\forall \gamma \neq \beta$, $B_\gamma \subset E^c$, E^c est d'intérieur non vide dans S. □

Lemme 4.2.14. *Tout sous-groupe définissable H de G est de t-intérieur non vide dans $\bar{H}$.*

Preuve. Soit H un sous-groupe définissable de G. Nous allons utiliser 4.2.13, avec $S = \bar{H}$ et $E = H$. Comme, $\bar{H} - H$ est d'intérieur vide dans H, par 4.2.13, H possède un t-intérieur dans $\bar{H}$. □

Corollaire 4.2.15. *Tout sous-groupe définissable de G est t-fermé.*

Preuve. Soit H sous-groupe définissable G. Par 3.1.5(i), $\bar{H} < G$ et par 4.2.14, H possède un intérieur dans $\bar{H}$. Donc H est ouvert dans $\bar{H}$ (corollaire 3.1.3). Par le lemme 3.1.5(ii), H est fermé dans $\bar{H}$: $H = \bar{H}$, c'est-à-dire H est fermé. □

Lemme 4.2.16. *Tout ensemble définissable $X \subset G$ est une union finie disjointe d'ensembles définissables définissablement t-connexes.*

Pour la notion d'ensemble définissablement connexe, voir définition 2.2.10.

Preuve. Par le lemme 4.1.5, X est recouvert par un nombre fini de translatés de V : $X = (a_1 V \cap X) \cup \cdots \cup (a_k V \cap X)$. Les $a_i V$ sont t-homéomorphes à V. Dans V, on peut décomposer tout ensemble définissable en cellules qui sont définissablement connexes par la proposition 2.2.12 (au sens de la topologie de M). Ainsi X est une union finie d'ensembles qui se décomposent en un nombre fini de morceaux définissablement t-connexes.
Pour obtenir une union disjointe, il faut "recoller" les morceaux, c'est à dire : si deux des ensembles E_1 et E_2 de cette décomposition de X sont tels que $E_1 \cup E_2$ est définissablement t-connexe, il s'agit de les enlever de la décomposition et de les remplacer par $E_1 \cup E_2$. En itérant cette substitution, on obtient donc une partition en ensembles définissablement t-connexes maximaux. □

Ce lemme nous donne directement :

Corollaire 4.2.17. *Pour tout $a \in G$, il existe un unique ensemble C définissablement t-connexe maximal contenant a. Nous appellerons cet ensemble C la composante définissablement t-connexe de a. Les composantes définissablement t-connexes des éléments de G forment une partition finie de G.*

Lemme 4.2.18. *Soient $H \subset K$ des sous-groupes définissables de G, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) H *est t-ouvert dans* K ;

(ii) H *est d'indice fini dans* K ;

(iii) $\dim H = \dim K$.

Preuve. Nous avons déjà prouvé (voir lemme 4.1.2) que (ii) et (iii) sont équivalents.
$(i) \to (ii)$: Si H est t-ouvert dans K, alors par le lemme 3.1.5(ii) H est t-fermé dans K. Par suite, H est d'indice fini dans K car K n'a qu'un nombre fini de composantes définissablement t-connexes.
$(ii) \to (i)$: Si H est d'indice fini dans K. Comme H est t-fermé dans K, le complémentaire de H dans K, $H - K$ est une union finie de t-fermés (des translatés de H). Ainsi $H - K$ est t-fermé dans K et H est donc t-ouvert dans K. □

Proposition 4.2.19. *Soit H un sous-groupe définissable de G et X la composante définissablement t-connexe de l'identité dans H. Alors X est le plus petit sous-groupe définissable de H d'indice fini.*

Preuve. Soit $a \in X$, $a \in a.X$ (car $1 \in X$). De plus, $a.X$ est la composante définissablement t-connexe de a (car la translation est un t-homéomorphisme définissable de G). Par le corollaire 4.2.17, $aX = X$ et X est donc un sous-groupe de G.
A nouveau par le lemme 4.2.16, X est d'indice fini dans G.
Si X possède un sous-groupe définissable Y d'indice fini, par le lemme 4.2.18, Y est t-ouvert-fermé ce qui contredit le fait que X est définissablement t-connexe. □

Lemme 4.2.20. *G a la condition de chaîne descendante (où DCC) sur les sous-groupes définissables (c'est à dire que G ne possède pas de chaîne infinie descendante de sous-groupes définissables).*

Preuve. Par la proposition précédente, G à la DCC sur les sous-groupes définissables d'indice fini. Par le lemme 4.2.18, G à donc la DCC sur les sous-groupes définissables de dimension fixée. Comme G est de dimension finie, G à bien la DCC sur les sous-groupes définissables. □

Si nous relisons la preuve de la DCC pour les groupes compacts (proposition 3.2.5). Nous constatons que sa structure est exactement pareille à celle de la preuve que nous venons de faire, elle consiste à montrer l'existence d'un plus petit sous-groupe (fermé) de même dimension (à savoir sa composante connexe) et ensuite de voir qu'il est d'indice fini.

Nous verrons plus loin dans la preuve du théorème 6.1.3, que pour montrer la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné, nous utilisons aussi la connexité et la dimension (finie) du groupe.

4.3 Analogue de la théorie de Sylow

Nous allons montrer que les groupes définissables abéliens dont tous les éléments sont de k-torsion sont des groupes finis. Nous aurons recours à ce résultat lors de la preuve du le théorème 6.1.3 qui est une des raisons d'être de ce mémoire.

A cette fin, nous présentons ici un analogue pour les groupes définissables d'une partie de la théorie classique de Sylow pour les groupes finis, en nous basant sur l'article [25] de Adam Strzebonski. Nous avons besoin d'une notion qui remplacera la cardinalité de la théorie classique, nous utiliserons pour cela la caractéristique d'Euler définie et étudiée dans le paragraphe 2.6. Pour tout ensemble définissable X, nous noterons comme avant $E(X)$ sa caractéristique d'Euler.

Nous allons donc comme précédemment considérer une structure o-minimale $\mathcal{M}$ qui de plus élimine les imaginaires (l'élimination des imaginaires est étudiée au paragraphe 1.2).

Soient $H < G$ des groupes définissables dans $\mathcal{M}$. Nous noterons G/H un choix définissable de représentants des classes latérales (à gauche) de H. Un tel choix existe puisque nous avons supposé que $\mathcal{M}$ avait l'élimination des imaginaires. Dans le cas où H est un sous-groupe normal de G nous avons donc que G/H est un groupe définissable dans $\mathcal{M}$. Cependant, nous considérerons souvent de tels quotients sans que H soit un sous-groupe normal de G, dans ce cas, G/H est un ensemble qu'il n'est pas question de munir d'une loi de groupe.

Proposition 4.3.1. *Soient G, H des groupes définissables tels que $H < G$, alors $E(G) = E(H).E(G/H)$.*

Preuve. G est en bijection définissable avec $H \times G/H : g \mapsto (x, y)$ où y est un choix définissable d'un élément de gH, et $x = gy^{-1} \in H$. Par la proposition 2.6.8, $E(G) = E(H \times G/H)$. Par le lemme 2.6.7, on obtient donc $E(G) = E(G/H).E(H)$. □

Soit G un groupe définissable et p un nombre premier ou 0.

Définition 4.3.2. Nous dirons que G est un p-groupe ssi pour tout sous-groupe définissable propre H de G,

$$E(G/H) \equiv 0 \bmod p$$

où "$\equiv 0 \bmod 0$" signifie "$= 0$". Nous dirons que G est un p-groupe fort si de plus, $E(G) \neq 0$ (ce qui implique directement que $p \neq 0$).

Convention. La notion de p-groupe (fort) n'a aucun sens pour un groupe qui n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$, car nous avons besoin de considérer sa caractéristique d'Euler (et celle de ses quotients). Dans la suite de ce paragraphe à chaque fois que nous parlerons d'un p-groupe (fort), nous ne préciserons pas qu'il s'agit d'un groupe définissable.

Remarque. Dans le sens usuel, un p-groupe est un groupe fini d'ordre p^n ($n \geq 0$). Un tel groupe G est donc de caractéristique d'Euler $E(G) = p^n$ car la cardinalité d'un ensemble fini coïncide avec sa caractéristique (voir page 37). Ainsi, pour tout sous-groupe définissable propre H de G, par la proposition 4.3.1, on a que $E(G/H)$ divise $E(G) = p^n$, ce qui entraîne que $E(G/H) \equiv 0 \text{ mod } p$.

La notion de p-groupe que nous venons de définir généralise donc la notion usuelle.

Lemme 4.3.3. *Soit un p-groupe H où p est un nombre premier ou 0. Soit S un ensemble définissable tel que nous ayons une action définissable de H sur S et soit*

$$S_0 = \{x \in S : \forall h \in H,\ hx = x\}.$$

Alors $E(S) \equiv E(S_0)$ mod p.

Preuve. Soit la relation d'équivalence $R := \{(x, y) \in S \times S : \exists h \in H,\ y = hx\}$ sur S. Vu que l'action de H sur S est définissable, R est une relation définissable. Nous noterons $Orb(x)$ la classe d'équivalence de $x \in S$ aussi notée $[x]_R := \{y \in S : (x, y) \in (x, y) \in R\}$. S est l'union disjointe $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{x \in S : E(Orb(x)) = n\}$. Pour tout $x \in S$, l'orbite $Orb(x)$ est la fibre R_x de x dans $R \subset S \times S$, par la proposition 2.6.6, $E(Orb(x))$ ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs. De plus, toujours par la proposition 2.6.6, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\{x \in S : E(Orb(x)) = n\}$ est définissable. Ainsi $E(S) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} E(\{x \in S : E(Orb(x)) = n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n.E(\{x \in S/R : E(Orb(x)) = n\})$. Attention, ici aussi S/R est considéré comme un sous-ensemble définissable de S.

Pour $x \in S$, nous noterons $H_x := \{h \in H : hx = x\}$ qui est souvent appelé le stabilisateur de x dans H. Il s'agit d'un sous-groupe définissable de H. Comme $H/H_x \to Orb(x) : a \mapsto a.x$ est une bijection définissable, nous avons par la proposition 2.6.8 que

$$E(Orb(x)) = E(H/H_x).$$

Si $H \neq H_x$, comme H est un p-groupe, alors $E(H/H_x) \equiv 0 \text{ mod } p$.
Si $H = H_x$, alors $x \in S_0$ et $Orb(x) = \{x\}$ donc $E(Orb(x)) = 1$.

Par conséquent, si p est premier, on a

$$E(S) = E(S_0) + p. \sum_{n\equiv 0 \text{ mod } p} \frac{n}{p} E(\{x \in S/R : E(Orb(x)) = n\}).$$

Cette somme est finie, puisque $E(Orb(x))$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Cela montre bien que $E(S) \equiv E(S_0) \bmod p$.

Si $p = 0$, et $x \notin S_0$, alors $E(H/H_x) = 0$, donc $E(Orb(x)) = 0$. Ainsi, $E(S) = E(S_0)$. □

Lemme 4.3.4. *Si p est un nombre premier divisant $E(G)$, alors G contient un élément d'ordre p.*

Preuve. Nous noterons ici G^p pour $G \times \cdots \times G$ (produit cartésien avec p facteurs). Soit $S := \{(a_1, \ldots, a_p) \in G^p : a_1 \ldots a_p = 1\}$. La correspondance $(a_1, \ldots, a_{p-1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_{p-1}, (a_1 \ldots a_{p-1})^{-1})$ définit clairement une bijection définissable $G^{p-1} \to S$. Nous en déduisons que $E(S) = E(G^{p-1}) = E(G)^{p-1}$ (par le lemme 2.6.7). Donc, $E(S) \equiv 0 \bmod p$ puisque $E(G) \equiv 0 \bmod p$.

La relation $k(a_1, \ldots, a_p) = (a_{k+1}, \ldots, a_p, a_1, \ldots, a_k)$ définit une action définissable de $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur S. Si on définit $S_0 := \{x \in S : \forall k \in \mathbb{Z}_p,\ k.x = x\}$ comme dans le lemme 4.3.3, on obtient que $(1, \ldots, 1) \in S_0$ et que les autres éléments de S_0 sont exactement les éléments d'ordre p. Nous savons également par le lemme 4.3.3 que $E(S) \equiv E(S_0) \bmod p$. Comme nous savons que $E(S) \equiv 0 \bmod p$, nous déduisons que $E(S_0) \equiv 0 \bmod p$. Donc, $E(S_0)$ ne peut pas être un singleton ce qui montre que nous avons au moins un élément d'ordre p. □

Rappelons que tout groupe définissable dans $\mathcal{M}$ a la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables (lemme 4.2.20).

Si $H < G$, nous noterons $N_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\} \supset H$ le normalisateur de H dans G.

Lemme 4.3.5. *Soit p un nombre premier ou 0. Si H est un p-sous-groupe définissable de G, alors*

$$E(N_G(H)/H) \equiv E(G/H) \ \mathit{mod}\ p.$$

Preuve. Soit $S := G/H$ et $\pi : G \to G/H : a \mapsto a.H$. Il est toujours de vigueur que nous considérons G/H comme un sous-ensemble définissable de G et $a.H$ dénote un élément de G qui représente la classe d'équivalence de a modulo H. S est donc un sous-ensemble définissable de G et π est une surjection définissable. La flèche $H \times S \to S : (h, s) \mapsto \pi(h.s)$ définit une action définissable. On pose comme précédemment $S_0 := \{x \in S : \forall h \in H,\ \pi(hx) = x\}$:

$$\begin{aligned} x \in S_0 &\Leftrightarrow \forall h \in H,\ \pi(h.x) = x \\ &\Leftrightarrow \forall h \in H,\ h.xH = xH \\ &\Leftrightarrow \forall h \in H,\ x^{-1}hxH = H \\ &\Leftrightarrow \forall h \in H,\ x^{-1}hx \in H \\ &\Leftrightarrow x^{-1}Hx \subset H. \end{aligned}$$

Par le lemme 4.2.20, $x^{-n}Hx^n$ forme une chaîne décroissante finie de sous-groupes définissables. Donc, il existe k tel que $x^{-k}Hx^k = x^{-k+1}Hx^{k-1}$, d'où $x^{-1}Hx = x^{k-1}(x^{-k}Hx^k)x^{-k+1} = x^{k-1}(x^{-k+1}Hx^{k-1})x^{-k+1} = H$.

Donc, $x^{-1}Hx = H$.

Nous avons ainsi montré que $S_0 = \{x \in G/H : x \in N_G(H)\} = N_G(H)/H$. Par le lemme 4.3.3, $E(S_0) \equiv E(S) \bmod p$. Comme $S := G/H$, $E(N_G(H)/H) = E(S_0) \equiv E(G/H) \bmod p$. □

Corollaire 4.3.6. *Si H est un p-sous-définissable de G et que $E(G/H) \equiv 0$ mod p, alors $N_G(H) \neq H$.*

Preuve. Si $N_G(H) = H$, alors $N_G(H)/H$ est un singleton et $E(N_G(H)/H) = 1$ ce qui contredit le fait que $E(N_G(H)/H) \equiv E(G/H) \equiv 0 \bmod p$. □

Nous avons maintenant les outils pour généraliser un des théorèmes fondamentaux de la théorie classique :

Théorème 4.3.7 (Premier Théorème de Sylow)**.** *Soient G un groupe définissable et p un nombre premier. Soit $H < G$ un p-sous-groupe fort et $E(G/H) \equiv 0$ mod p. Il existe un p-sous-groupe fort K de G tel que H est un sous-groupe normal propre de K et K/H est de cardinalité p.*

Preuve. Par le corollaire 4.3.6, $N_G(H) \neq H$ et par le lemme 4.3.5, nous avons $E(N_G(H)/H) \equiv E(G/H) \equiv 0 \bmod p$. Puisque H est normal et définissable dans $N_G(H)$, $N_G(H)/H$ est un groupe définissable (car nous avons supposé l'élimination des imaginaires).

Comme p est premier nous pouvons appliquer le lemme 4.3.4 qui nous dit que $N_G(H)/H$ possède un sous-groupe d'ordre p. Nous noterons ce sous-groupe K/H où K est un sous-groupe de $N_G(H)/H$ contenant H. Il est clair que H est un sous-groupe propre de K qui est normal (puisque c'est un sous-groupe normal de $N_G(H) \supset K$).

Il reste à montrer que K est un p-sous groupe fort. Comme $E(H) \neq 0$ et que $E(K/H) = |K/H| = p$, on voit directement que $E(K) \neq 0$.

Soit K_0 un sous-groupe propre définissable de K.

1. Si $K_0 \subseteq H$: $E(K/K_0) = E(K/H).E(H/K_0) = pE(H/K_0) \equiv 0 \bmod p$.

2. Si $H \subseteq K_0$: comme $[K : H] = p$, $H = K_0$. Donc, on a $E(K/K_0) = E(K/H) = p$.
3. Si $K_0 \nsubseteq H$ et $H \nsubseteq K_0$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K_0 \arrow[dr, dash] & & H \arrow[dl, dash] \\
 & K_0 \cap H &
\end{tikzcd}$$

– Nous avons évidemment $H = K \cap H \supsetneq K_0 \cap H$. Nous factorisons donc $E(K/K_0 \cap H) = E(K/H).E(H/K_0 \cap H) = p.E(H/K_0 \cap H) \equiv 0$ mod p^2 (car H est un p-groupe fort).
– Nous avons également $K_0 = K \cap K_0 \supseteq H \cap K_0$, ce qui permet de factoriser à nouveau $E(K/K_0 \cap H) = E(K/K_0).E(K_0/K_0 \cap H)$. Nous avons donc $E(K/K_0).E(K/K_0 \cap H) \equiv 0 \mod p^2$. Nous allons montrer que $E(K_0/K_0 \cap H) = p$ ce qui, au vu de la congruence obtenue, entraînera que $E(K/K_0) \equiv 0 \mod p$.
– Prouvons maintenant que $[K_0 : K_0 \cap H] = p$.
On a $[K : H] = p$, donc il existe un élément $a \in K$ tel que $K = \langle H, a\rangle$ et comme $K_0 \nsubseteq H$, $K_0 \setminus H \neq \varnothing$, ce qui nous permet de trouver un tel élément $a \in K_0$. Donc $K_0 = K \cap K_0 = \langle H \cap K_0, a\rangle$.
De plus comme $[K : H] = p$ et $a \in N_G(H)$, on a que $K = \{h.a^i : h \in H, i = 0, \ldots, p-1\}$. Ainsi, pour tout $k_0 \in K_0$, on a $k_0.a^{-i} \in H$ pour un certain $i = 0, \ldots, p-1$. On obtient alors que $k_0 = (k_0.a^{-i}).a^i$ où $(k_0.a^{-i}) \in K_0 \cap H$, ce qui implique que $[K_0 : K_0 \cap H] = p$.

□

Corollaire 4.3.8. *Les p-groupes forts sont exactement les groupes finis d'ordre p^n où $n \geq 0$.*

Preuve. Soit G un p-groupe fort. Comme $E(G) \neq 0$, on peut écrire $E(G) = m.p^n$ où p ne divise pas m et $n \geq 0$. Si on applique n fois le théorème 4.3.7, en commençant par $H = \{1\}$ et pour toutes les autres étapes en prenant pour H le groupe K obtenu à l'étape précédente, on obtient un sous-groupe $\mathfrak{M}$ de G d'ordre p^n. Puisque $mp^n = E(G) = E(G/\mathfrak{M}).E(\mathfrak{M})$ et $E(\mathfrak{M}) = p^n$, $E(G/\mathfrak{M}) = m$. Donc $\mathfrak{M}$ n'est pas un sous-groupe propre de G, sinon on pourrait encore appliquer le théorème 4.3.7 et obtenir un sous-groupe de G d'ordre p^{n+1}. Ainsi, $\mathfrak{M} = G$, et G est bien fini d'ordre p^n. □

Etant donné un groupe de caractéristique d'Euler $m.p^n \neq 0$, G possède donc un p-sous-groupe fort maximal $\mathfrak{M}$ qui sera d'ordre p^n. Un tel groupe sera appelé un p-sous-groupe fort de Sylow de G.

Corollaire 4.3.9. *Soit T un groupe abélien définissable (que noterons additivement) tel qu'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tel que pour tout $t \in T$, $k.t = 0$. Alors T est fini.*

Preuve. Si $E(T) = 0$, T contient des éléments d'ordre p^n pour tout $n \geq 0$, ce qui contredit les hypothèses.

Donc, $E(T) \neq 0$, disons que $E(T) = \pm p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$ où les p_i sont premiers et les $a_i \in \mathbb{N}$. Soient F_i des p_i-sous-groupes forts de Sylow de T. Soit $F := F_1 + \cdots + F_n$, $|F| = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$. Donc $E(F) = \pm E(T)$ et nous en déduisons que $E(T/F) = \pm 1$. Tous les éléments de T/F sont d'ordre fini (car c'est le cas de T). Par conséquent, si T/F est non trivial, T/F possède un sous-groupe définissable fini d'ordre $m \neq 1$, ce qui entraîne que m divise $E(T/F) = \pm 1$. Donc $T = F$, ce qui prouve que T est un groupe fini d'ordre $p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$. $\square$

Il est possible de développer d'avantage cette théorie de Sylow o-minimale. Cela sortirait quelque peu du cadre de ce mémoire qui traite avant tout les aspects topologiques. Nous laissons donc cela en suspend.

Chapitre 5

Groupes type-définissables

Dans ce chapitre, nous nous placerons dans le cas où $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure κ-saturée[1] pour un cardinal infini $\kappa > |\mathcal{L}|$.

Nous dirons qu'un ensemble est borné ou petit si c'est un ensemble de cardinalité strictement inférieure à κ.

5.1 Ensembles type-définissables

Tout au long de ce paragraphe, nous ne supposerons plus que $\mathcal{M}$ est o-minimale.

Définition 5.1.1. Soit $X \subset M^n$. Nous dirons que X est un sous-ensemble type-définissable de M^n s'il existe une famille d'ensembles $\mathcal{L}$-définissables $(X_i)_{i\in I}$ inclus à M^n telle que $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ et I est un petit ensemble. Autrement dit, un ensemble type-définissable est un ensemble définissable par une conjonction de moins de κ formules.

Remarque 5.1.2. Dans cette définition, nous pouvons sans perte de généralité supposer que la famille (X_i) est stable par intersection finie : en effet, si $X = \bigcap_i X_i$, il est évident que $X = \bigcap_{j\in J} Y_j$ où $(Y_j)_{j\in J}$ est la famille de toutes les intersections finies de X_i (et J étant l'ensemble des parties finies de I, il est clair que $|J| < \kappa$).

Pour tout petit ensemble $A \subset M$, nous dirons qu'un ensemble X est type-définissable sur A, s'il est une petite intersection d'ensembles A-définissables.

Proposition 5.1.3. *Soient S un sous-ensemble définissable de M^n et $A \subset M$ avec $|A| < \kappa$, les sous-ensembles de S type-définissables sur A sont les fermés*

[1] Pour la saturation, voir paragraphe 1.1.

d'une topologie sur S que nous nommerons A-topologie. De plus, les sous-ensembles A-définissables de S, sont exactement les ensembles fermé-ouverts de cette topologie (et constituent une base de cette topologie).

Preuve. Soient $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ et $Y = \bigcap_{j\in J} Y_j$ des ensembles A-types-définissables, $X \cup Y = (\bigcap_{i\in I} X_i) \cup (\bigcap_{j\in J} Y_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J}(X_i \cup Y_j)$, ce qui est bien une petite intersection d'ensembles A-définissables (car $|I \times J| = \max(|I|, |J|)$.

Il est clair que si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles type-définissables, $\bigcap_{i\in I} E_i$ est une intersection d'ensembles définissables. De plus, comme $\kappa > |\mathcal{L}|$, le nombre de $\mathcal{L}$-formules est petit, ce qui nous dit que le nombre d'ensembles définissables est petit. Donc, une intersection quelconque d'ensembles type-définissables est elle-même type-définissable.

Il est évident que si X est A-définissable, alors X est à la fois fermé et ouvert. Réciproquement, si X est ouvert-fermé, c'est à dire que X est défini par une petite disjonction $\bigvee_{i\in I} \phi_i$ et une petite conjonction $\bigwedge_{j\in J} \psi_j$. Nous avons donc $\mathcal{M} \models \bigvee_{i\in I} \phi_i \leftrightarrow \bigwedge_{j\in J} \psi_j$. Il va de soi que pour tout $I_0 \subset I$, $\bigvee_{i\in I_0} \phi_i \rightarrow \bigvee_{i\in I} \phi_i$ et pour tout $J_0 \subset J$, $\bigwedge_{j\in J} \psi_j \rightarrow \bigwedge_{j\in J_0} \psi_j$. Nous allons montrer qu'il existe des ensembles finis $I_0 \subset I$ et $J_0 \subset J$ tels que

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{i\in I} \phi_i \arrow[r, leftrightarrow] & \bigwedge_{j\in J} \psi_j \arrow[d] \\
\bigvee_{i\in I_0} \phi_i \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \bigwedge_{j\in J_0} \psi_j,
\end{tikzcd}$$

ce qui montrera bien que X est définissable. Nous avons directement que pour tous I_0, J_0 finis, $\bigvee_{i\in I_0} \phi_i \rightarrow \bigwedge_{j\in J_0} \psi_j$.

Pour l'autre implication, soit T la théorie de $\mathcal{M}$, supposons que pour tous sous-ensembles finis $I_0 \subset I$ et $J_0 \subset J$, $T \vdash \neg(\bigwedge_{j\in J_0} \psi_j \rightarrow \bigvee_{i\in I_0} \phi_i)$. Nous avons donc que $(\bigwedge_{j\in J_0} \psi_j) \wedge (\bigwedge_{i\in I_0} \neg\phi_i)$ est consistant avec T. Autrement dit, $(\bigwedge_{j\in J} \psi_j) \wedge (\bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i)$ est finiment consistant avec T, et par saturation de $\mathcal{M}$, on peut trouver dans M^n un élément x tel que $(\bigwedge_{j\in J} \psi_j(x)) \wedge (\bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i(x))$, ce qui contredit que $\mathcal{M} \models \bigvee_{i\in I} \phi_i \leftrightarrow \bigwedge_{j\in J} \psi_j$. □

Soit X type-définissable, nous dirons qu'une relation d'équivalence E sur X est bornée ssi $|X/E| < \kappa$.

Définition 5.1.4. Soit X un ensemble type-définissable sur A (muni de la A-topologie) et E une relation d'équivalence sur X bornée et type-définissable sur A, nous plaçons sur X/E la topologie quotient (voir définition 3.1.6). Cette topologie sera appelée la topologie logique.

Si $\mu : X \rightarrow X/E$ désigne la projection canonique, nous aurons donc que $Z \subset X/E$ est fermé ssi $\mu^{-1}(Z)$ est A-type-définissable dans M^n.

Proposition 5.1.5. *X/E (muni de la topologie logique) est un espace topologique Hausdorff compact.*

Preuve. Hausdorff : Nous noterons ici, $E(x, y)$ pour dire que $(x, y) \in E$. Nous avons que $\forall x \forall y\, (E(x, y) \leftrightarrow \bigwedge E_i(x, y))$ où i varie dans un petit ensemble I et les relations E_i sont définissables et telles que $\forall x \forall y\, (E_i(x, y) \to E_i(y, x))$ et $\forall x E_i(x, x)$.

Remarque. Quitte à poser $\tilde{E}_i(x, y) \equiv E_i(x, y) \wedge E_i(y, x)$, nous avons supposé ici que $\forall x \forall y\, (E_i(x, y) \to E_i(y, x))$.

Lemme 5.1.6. *Pour tout $i \in I$, il existe $j \in I$ tel que $\forall x \forall y \forall z\, (E_j(x, y) \wedge E_j(y, z) \to E_i(x, z))$.*

Soient $a, b \in X$ tels que $\neg E(a, b)$. Il existe i tel que $\neg E_i(a, b)$. Soit j tel que $E_j(x, y) \wedge E_j(y, z) \to E_i(x, z)$. Soient les ouverts U_1 défini par $E_j(a, y)$ et U_2 défini par $E_j(y, b)$. Il contiennent respectivement $\mu(a)$ et $\mu(b)$. Grâce à notre bon choix de j, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Compact : Soit $(Z_i)_{i \in I}$, une famille de fermés de X/E qui à la propriété d'intersection finie (pif). Ainsi, $\{\mu^{-1}(Z_i) : i \in I\}$ a la pif. La saturation de $\mathcal{M}$ implique alors que $\bigcap_{i \in I} \mu^{-1}(Z_i)$ est non vide. Donc, $\bigcap_{i \in I} Z_i$ est non vide. Nous avons bien sûr que $|I| < \kappa$ puisque $|\mathcal{L}_A| < \kappa$. □

Preuve du lemme 5.1.6. Supposons au contraire qu'il existe i, pour tout j, on x, y, z tels que $E_j(x_j, y_j) \wedge E_j(y_j, z_j) \wedge \neg E_i(x_j, z_j)$. Par saturation de $\mathcal{M}$ (j varie dans I qui est un petit ensemble), nous pouvons donc trouver x, y, z (indépendants de j) tels que pour tout j, $E_j(x, y) \wedge E_j(y, z) \wedge \neg E_i(x, z)$. Autrement dit, nous avons x, y, z tels que $E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge \neg E_i(x, z)$. Mais $\neg E_i(x, z) \to \neg E(x, z)$, nous obtenons donc $E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge \neg E(x, z)$, ce qui contredit la transitivité de E. □

Lemme 5.1.7 ([1], remarque 1.6)**.** *Supposons que $\mathcal{M}_0$ soit une sous-structure élémentaire de $\mathcal{M}$ telle que X soit définissable sur M_0 et E soit type-définissable sur M_0. Alors $Z \subset X/E$ est fermé ssi $\mu^{-1}(Z)$ est type-définissable sur M_0. Par conséquent, l'espace topologique X/E possède une base de cardinalité inférieure (ou égale) à $|M_0| + |\mathcal{L}|$.*

Lemme 5.1.8. *Un ensemble $Z \subset X/E$ est fermé ssi $Z = \mu(Y)$ pour un ensemble A-type-définissable $Y \subset X$.*

Preuve. En effet, si Z est fermé, $\mu^{-1}(Z)$ est A-type-définissable. On pose alors $Y := \mu^{-1}(Z)$, et nous avons bien que $Z = \mu(Y)$. Réciproquement, si $Z = \mu(Y)$ pour un ensemble A-type-définissable $Y \subset X$, montrons que $\mu^{-1}(Z) = \mu^{-1}(\mu(Y))$ est bien A-type-définissable. Il suffit de remarquer que $\mu^{-1}(\mu(Y))$ est l'union des E-classes d'équivalence des éléments de Y. Autrement dit,

$\mu^{-1}(\mu(Y)) = \{x \in X : \exists y\, E(x,y) \wedge y \in Y\}$ et il est clair que cet ensemble est A-type-définissable car E et Y le sont. $\square$

Lemme 5.1.9. *Soient X un ensemble définissable et E une relation d'équivalence type-définissable bornée. Soit $a \in X$ et aE sa E-classe d'équivalence en temps que sous-ensemble de X. Si Y est un sous-ensemble définissable de X tel que $aE \subset Y$ alors, $\mu(a) = aE$ est dans l'intérieur de $\mu(Y)$.*

Preuve. Comme Y est définissable dans X, par le lemme 5.1.8, $Z := \mu(X \setminus Y)$ est un ensemble fermé dans X/E qui ne contient pas $\mu(a)$. Donc, le complémentaire de Z dans X/E est un ouvert qui contient $\mu(a)$ et qui est contenu dans $\mu(Y)$. $\square$

Pour de plus amples informations sur les ensembles type-définissables et la topologie logique, [6] est une très bonne référence.

5.2 Groupes type-définissables

Nous allons maintenant travailler dans un groupe G définissable dans une structure o-minimale $\mathcal{M}$. Et nous considérerons des sous-ensembles type-définissables de G. Nous avons construit, dans le paragraphe 4.2, une topologie sur G qui en fait un groupe topologique. Pour distinguer cette topologie de la topologie o-minimale sous-jacente, nous la nommerons topologie t.

De manière tout à fait similaire à la définition 2.2.10, nous définissons la t-connexité définissable pour les ensembles type-définissables :

Définition 5.2.1. Nous dirons qu'un sous-ensemble type-définissable X de G est définissablement t-connexe, s'il ne peut être écrit comme une union disjointe de deux t-ouverts relativement définissables et non vides (relativement définissable veut dire qu'il est l'intersection d'un ensemble définissable avec X).

De plus, nous dirons qu'il est type-définissablement t-connexe s'il ne peut être écrit comme une union disjointe de deux t-ouverts relativement type-définissables et non vides.

Lemme 5.2.2. *Soit $X \subset G$ un ensemble type-définissable, X est définissablement t-connexe ssi $X = \cap_{i\in I} X_i$ pour une famille $(X_i : i \in I)$ stable par intersection finie d'ensembles définissables, définissablement t-connexes où $|I| < \kappa$.*

Preuve. [$\Rightarrow$] : Supposons que X soit définissablement t-connexe, nous pouvons supposer (par la remarque 5.1.2) que $X = \cap_{i\in I} Y_i$ où $(Y_i)_{i\in I}$ est une petite famille d'ensembles définissables stable par intersection finie. Prenons un élément $x_0 \in X$ (n'importe lequel), soit Z_i, la composante définissablement t-connexe de x_0 dans l'ensemble définissable Y_i. Comme X est définissablement t-connexe, $X \subset Z_i$, d' où $X \subset \cap_{i\in I} Z_i$. Par ailleurs, comme pour tout $i \in I$, $Z_i \subset Y_i$, on a $\cap_{i\in I} Z_i \subset \cap_{i\in I} Y_i = X$. Donc, $X = \cap_{i\in I} Z_i$. De plus, $(Z_i)_{i\in I}$ est stable par intersection finie car $(Y_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

[$\Leftarrow$] : Supposons que le membre de droite soit vrai et que X ne soit pas définissablement t-connexe. Il existe donc deux t-ouverts définissables Y_1, Y_2 de M^n tels que

(i) $X \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$ et

(ii) $X \cap (Y_1 \cup Y_2)^c = \varnothing$.

Par compacité (et par saturation de $\mathcal{M}$), il existe $i \in I$ tel que (i) et (ii) sont vrais en remplaçant X par X_i, ce qui contredirait que X_i soit définissablement t-connexe. $\square$

Nous utilisons ici la notion de cardinal inaccessible définie dans le paragraphe 1.3.

Théorème 5.2.3. *Supposons que κ soit fortement inaccessible. Soit un ensemble type-définissable $X \subset G$, X est l'union d'une petite famille de sous-ensembles type-définissables définissablement t-connexes maximaux (que nous appellerons les composantes définissablement t-connexes de X). Les composantes définissablement t-connexes de X sont type-définies sur le même ensemble de paramètres que X.*

Preuve. Soit A l'ensemble des paramètres sur lesquels $X := \cap_{i\in I} X_i$ est type-défini ($|I| < \kappa$ et (X_i) est stable par intersection finie). Pour tout $i \in I$, nous noterons $X_{i,0}, \ldots, X_{i,n(i)}$ les composantes t-connexes de X_i, et pour tout $x \in X$ soit $f_x \in \Pi_{i\in I}\{0, \ldots, n(i)\}$ tel que $x \in \bigcap_{i\in I} X_{i,f_x(i)}$.

L'ensemble $\{X_{i,f_x(i)} : i \in I\}$ est stable par intersection finie (car (X_i) l'est lui aussi). Par le lemme 5.2.2, nous savons que les ensembles $Y_{f_x} := \cap_{i\in I} X_{i,f_x(i)}$ sont définissablement t-connexes et comme κ est fortement inaccessible, $|\Pi_{i\in I}\{0, \ldots, n(i)\}| \leq 2^{|I|} < \kappa$. Il en résulte que l'ensemble $F := \{Y_f : \exists x \in X,\ f = f_x\}$ est une partition de X en $< \kappa$ ensembles définissablement t-connexes type-définissables.

Il nous reste à prouver que tous les Y_{f_x} sont des sous-ensembles type-définissables définissablement t-connexe maximaux de X c'est-à-dire que tout sous-ensemble définissablement t-connexe type-définissable C de X est contenu dans un seul des éléments de F. On choisit un $x \in C$, par construction on a que pour tout i, $C \subset X_{i,f_x(i)}$, donc $C \subset \cap_{i\in I} X_{i,f_x(i)} = Y_{f_x}$. $\square$

Proposition 5.2.4. *Le groupe G est un groupe topologique (pour la topologie des ensembles A-type-définissables).*

Preuve. Comme G est définissable, nous avons des formules θ et ξ telles que $x.y = z \leftrightarrow \theta(x, y, z)$ et $y = x^{-1} \leftrightarrow \xi(x, y)$. Soit $Z \subset G$, un ensemble type-définissable, disons $x \in Z \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \phi_i(x)$. Nous avons alors $x.y \in Z \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \phi_i(x.y) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \exists z(\theta(x, y, z) \wedge \phi_i(z))$ et $x \in Z^{-1} \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \phi_i(x^{-1}) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \exists y(\xi(x, y) \wedge \phi_i(y))$. Ce qui montre bien que la multiplication et l'inversion sont continues. □

Soit G un groupe définissable et H un sous-groupe normal A-type-définissable de G, H induit une relation d'équivalence A-type-définissable sur G : $E(x, y)$ ssi $x.y^{-1} \in H$. Nous plaçons sur le groupe G/H la topologie logique.

Proposition 5.2.5. *Le groupe G/H est un groupe topologique Hausdorff et compact.*

Preuve. Par la proposition 3.1.7, G/H est un groupe topologique et par la proposition 5.1.5, c'est un espace Hausdorff et compact. □

Nous allons maintenant généraliser le lemme 4.2.18 qui dit que tout sous-groupe définissable d'indice fini soit t-ouvert.

Lemme 5.2.6. *Soit H un sous-groupe type-définissable d'indice borné de G. Alors, H est t-ouvert.*

Preuve. Comme H est type-définissable, $H = \bigcap_{i \in I} X_i$ où $(X_i : i \in I)$ est une petite famille d'ensembles définissables. Nous supposerons que $(X_i : i \in I)$ est stable par intersection finie (voir remarque 5.1.2).

Nous allons commencer par montrer que pour tout i, G est recouvert par un nombre fini de translatés de X_i. Supposons au contraire que G ne soit recouvert par aucune famille finie de translatés de X_i. Cela revient à dire que le type $p(x) := \{x \in G \setminus aX_i : a \in G\}$ est finiment réalisé dans $\mathcal{M}$. Comme $H \subset X_i$, on en déduit que le type

$$q(x) := \{x \in G \setminus aH : a \in G\}$$

est finiment consistant. La κ-saturation de $\mathcal{M}$ entraîne alors que pour tout sous-ensemble A de G tel que $|A| < \kappa$, l'ensemble de formules

$$\{x \in G \setminus aH : a \in A\}$$

est réalisé dans $\mathcal{M}$. Cela contredirait que H soit d'indice borné dans G.

Nous avons donc pour tout $i \in I$ que $G = \bigcup_{j=1}^{l} a_j X_i$ où les a_j sont des éléments de G et $l \in \mathbb{N}$. Comme l'opération de G est définissable, pour tous i et j, $\dim(a_j X_i) = \dim(X_i)$. On en déduit, par le lemme 2.4.10 (ii), que pour tout i, $\dim(G) = \dim(X_i)$. Nous noterons k cette dimension.

Par le corollaire 3.1.3, il suffit de montrer que H est d'intérieur non vide pour la topologie t. Rappelons que G contient un ouvert large définissable V sur lequel la topologie induite de M^n et la topologie t coïncident (voir construction de la topologie t dans la preuve du théorème 4.2.1). Pour tout $i \in I$, $\dim(X_i) = \dim(G)$, donc X_i contient un point générique de G. Ce point générique est situé dans V puisque V est large dans G et il est situé à l'intérieur de X_i (intérieur au sens de la topologie o-minimale). Par la remarque de la page 28, "$\bar{x}$ est de dimension k sur $\varnothing$" ou de manière équivalente "$\bar{x}$ est un point générique de G sur $\varnothing$" est exprimable par un ensemble de formules sans paramètres, on peut ainsi considérer l'ensemble de formules $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \equiv$

$$\{\bar{x} \text{ est un point générique}\} \cup \{(a_1 < x_1 < b_1), \ldots, (a_n < x_n < b_n)\}$$

$$\cup\{\forall y_1, \ldots, y_n, ((a_1 < y_1 < b_1), \ldots, (a_n < y_n < b_n) \Rightarrow \bar{y} \in V \cap X_i) : i \in I\}.$$

Cet ensemble est finiment consistant car la famille $(X_i : i \in I)$ est stable par intersection finie.

Par compacité, Γ est consistant, ce qui implique qu'il existe un point générique $\bar{x}$ de G, tel que $\bar{x} \in V$ et un pavé P contenant $\bar{x}$ qui est inclus à $\bigcap_{i \in I} X_i = H$. Autrement dit, on a trouvé un point $\bar{x}$ qui est dans l'intérieur de H ce qui achève la preuve car la topologie o-minimale coïncide sur V avec la topologie t. $\square$

Par conséquent, si nous plaçons sur G/H la topologie quotient issue de la t-topologie, les singletons sont ouverts (ce sont des translatés de l'ouvert $\{H\}$). Cette topologie est donc la topologie discrète et a peu d'intérêt.

Proposition 5.2.7. *Soit H un sous-groupe type-définissable d'indice borné. Si nous plaçons sur G la topologie t et sur G/H la topologie logique, alors la projection canonique $\mu : G \to G/H$ est continue.*

Preuve. Nous savons que par définition la topologie quotient (voir définition 3.1.6) rend la projection continue. Soit un ouvert U de la topologie logique, en particulier, il s'agit d'un ouvert pour la topologie discrète. Comme la topologie discrète est la topologie quotient de t (lemme 5.2.6), $\mu^{-1}(U)$ est ouvert pour la topologie t. $\square$

Dans la suite, nous n'allons plus utiliser la topologie des ensembles type-définissables que nous avions placé sur G. Elle ne nous a servi qu'a définir la topologie logique. *A partir de maintenant, nous allons toujours placer sur G la topologie t et sur G/H la topologie logique.* Le résultat de continuité que nous venons de prouver nous permettra de relier ces deux topologies.

Nous allons maintenant caractériser les groupes définissables qui sont définissablement connexes pour la topologie t.

Proposition 5.2.8. *Soit G un groupe définissable, G est définissablement t-connexe ssi G n'a pas de sous-groupe définissable propre d'indice fini.*

Preuve. Tout sous-groupe définissable est t-fermé. Si G est définissablement t-connexe, alors G ne peut pas posséder de sous-groupe propre définissable d'indice fini, car il serait alors t-ouvert et t-fermé.

Si G n'est pas definissablement t-connexe alors la composante t-connexe de l'identité est un sous-groupe définissable propre de G qui est d'indice fini (par la proposition 4.2.19). □

Lemme 5.2.9. *Si H est un sous-groupe type-définissable de G d'indice fini, alors H est définissable.*

Preuve. Par 5.1.3, il suffit de montrer que le complémentaire de H est aussi type-définissable. Comme H est d'indice fini, son complémentaire $G \setminus H$ est une union finie de classes latérales $a_k.H$ qui sont bien évidement type-définissables. A nouveau par 5.1.3, $G \setminus H$ est type-définissable. □

Dans [6], lemme 2.4, Lou van den Dries généralise la proposition 1.1.7.

Proposition 5.2.10. *Soit un ensemble $X \subset M^k$ type-définissable avec paramètres dans M, X est type-définissable sur A ssi tous les automorphismes de $\mathcal{M}$ qui fixent A point par point fixent X globalement.*

Lemme 5.2.11. *(i) Tout sous-groupe définissable d'indice fini H de G contient un sous-groupe définissable normal d'indice fini défini sur le même ensemble de paramètres que G et H.*

(ii) Tout sous-groupe type-définissable H de G d'indice borné dans G contient un sous-groupe normal d'indice borné dans G et type-définissable sur les mêmes paramètres que G et H.

Preuve. (i) Notons A l'ensemble des paramètres sur lesquels les groupes G et H sont définis.

Soit $K := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$, il s'agit bien sûr d'un sous-groupe normal de G. Comme $K \subset H$, $G/K \times G/H \to G/H : (x.K, y.H) \mapsto x.yH$ est un action de G/K dans G/H. Nous devons montrer que cette action est bien définie. Soit x, x' tels que $x'.x^{-1} \in H$, $x.yH = x'x^{-1}H.xyH = x'x^{-1}xy.H = x'yH$. Montrons maintenant que cette action est fidèle, c'est à dire que $(\forall g \in G,\ g'gH = gH) \Rightarrow (g' \in K)$. Si $\forall g \in G, g'gH = g.H$, alors $\forall g \in G, g^{-1}g'gH = H$, donc $\forall g \in G, g^{-1}g'g \in H$, par conséquent $\forall g \in G, g' \in gHg^{-1}$ ce qui signifie que $g' \in K$.

Il est clair que K est type-définissable. Comme l'action $G/K \times G/H \to G/H$ est fidèle et que l'action d'un élément de G/K est une multiplication dans G/H, $[G:K] \leq [G:H]$. Donc K est d'indice fini et par le lemme 5.2.9, il est définissable.

Tous les automorphismes de $\mathcal{M}$ qui fixent A point par point fixent G et H globalement. Par conséquent $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ est fixé par ces automorphismes. Par la proposition 1.1.7, K est donc A-définissable.

(ii) Similaire à la preuve de (i) : On définit à nouveau $K := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$, il s'agit d'un sous-groupe normal type-définissable de G. Le quotient G/K agit fidèlement sur G/H ce qui montre que K est d'indice borné dans G. Comme K est fixé par tous les automorphismes de $\mathcal{M}$ qui fixent A, par la proposition 5.2.10, K est A type-définissable.

□

Proposition 5.2.12. *Pour tout petit ensemble A, sur lequel G est type-défini, il y a un unique plus petit sous-groupe d'indice borné de G type-définissable sur A. Ce sous-groupe est normal dans G, nous le noterons G_A^{00}.*

Preuve. L'intersection de tous les sous-groupes A-type-définissables de G d'indice borné est un sous-groupe A-type-définissable d'indice borné dans G. Par 5.2.11, ce sous-groupe est normal. □

Nous serons dans la suite (voir chapitre 6), particulièrement attentif au cas où G_A^{00} ne dépend pas de A, c'est à dire que G possède un plus petit sous-groupe type-définissable d'indice borné. Ce groupe est type définissablement connexe. Nous le nommerons G^{00} et nous l'appellerons la composante type-définissablement connexe de l'identité.

Lemme 5.2.13. *Supposons que G soit définissablement t-connexe. Soit H un sous-groupe type-définissable et normal d'indice borné dans G. Alors G/H est connexe.*

Preuve. G/H étant un groupe topologique compact, s'il n'est pas connexe, par le théorème 3.1.9, il possède un sous-groupe propre ouvert qui sera donc fermé. Par compacité de G/H, il sera de plus d'indice fini. L'image inverse de ce sous-groupe de G/H est donc un sous-groupe type-définissable de G d'indice fini. Par le lemme 5.2.9, ce sous-groupe est définissable, ce qui implique bien que G n'est pas définissablement t-connexe (par la proposition 5.2.8). □

Nous allons maintenant généraliser ce lemme, la preuve de la généralisation est cependant différente de celle que nous venons de faire.

Lemme 5.2.14. *Soient H un sous-groupe type-définissable normal d'indice borné de G et $\mu : G \to G/H$ la projection canonique. Supposons que $X \subset G$ soit définissable et définissablement t-connexe. Alors, $\mu(X) \subset G/H$ est connexe.*

Preuve. Nous savons par la remarque 5.1.8 que $\mu(X)$ est fermé. Supposons qu'il ne soit pas connexe, il est alors l'union disjointe de deux fermés Z_1 et Z_2. Par définition de la topologie logique, les ensembles $Y_1 := \mu^{-1}(Z_1)$ et $Y_2 := \mu^{-1}(Z_2)$ sont type-définissables. De plus, par continuité de μ (par la proposition 5.2.7), Y_1 et Y_2 sont t-fermés dans le groupe G. Nous pouvons donc écrire X comme l'union disjointe de $Y_1 \cap X$ et $Y_2 \cap X$ qui sont des ensembles fermés dans X.

Il nous reste à montrer que $Y_1 \cap X$ et $Y_2 \cap X$ sont définissables. Notons X^c le complémentaire de X dans M^n : $M^n \setminus X$. Les ensembles $Y_1 \cap X$ et $Y_2 \cup X^c$, sont type-définissables et sont complémentaires l'un de l'autre. Ils sont, par la proposition 5.1.3, tous deux définissables. Comme $Y_1 \cap X$ est définissable et que X est définissable, $Y_2 \cap X$ est définissable. □

Lemme 5.2.15. *Soit H un sous-groupe type-définissable de G. Il existe une famille $(H_i)_{i \in I}$ de sous-groupes type-définissables (où $|I| < \kappa$) telle que chaque H_i est type-défini par au plus $\aleph_0$ formules et $H = \bigcap_{i \in I} H_i$.*

Preuve. Par la remarque 5.1.2, nous pouvons supposer que H est défini par une famille de formules $(\phi_i)_{i \in I}$ qui est stable par conjonction finie. Par un argument tout à fait similaire à celui de la preuve du lemme 5.1.6[2], on montre que pour tout $i \in I$, il existe $j(i) \in I$ tel que $\phi_{j(i)}(x) \wedge \phi_{j(i)}(y) \to [\phi_i(x.y) \wedge \phi_i(x^{-1})]$. On définit alors H_i étant type-défini par les formules $(\phi_{i(n)})_{n<\omega}$ où $i(0) := i$ et $i(n+1) := j(i(n))$. H_i est donc un sous-groupe de G contenant H et il est évident que $H = \cap_{i \in I} H_i$ puisque $\phi_{i(0)} = \phi_i$. □

Remarque 5.2.16. Si $X \subset G$ est type-définissable et $f : X \to X$ est un homéomorphisme définissable alors f permute les composantes définissablement t-connexe de X.

Théorème 5.2.17. *Supposons que κ soit fortement inaccessible. Soit H un sous-groupe type-définissable de G, la composante définissablement t-connexe de 1 dans H est un sous-groupe normal type-définissable de H d'indice borné dans H. Nous appellerons ce sous-groupe H^0. De plus, si H est normal dans G, alors H^0 est normal dans G.*

[2] Remplacer $E_j(x_j, y_j) \wedge E_j(y_j, z_j) \wedge \neg E_i(x_j, z_j)$ par $\phi_{j(i)}(x) \wedge \phi_{j(i)}(y) \wedge \neg[\phi_i(x.y) \wedge \phi_i(x^{-1})]$.

Preuve. Pour tout $x \in H^0$, la multiplication par x est un homéomorphisme définissable de H. De plus, $x.H^0 \cap H^0 \neq \varnothing$. Par la remarque 5.2.16, on déduit que $x.H^0 = H^0$, ce qui prouve déjà que H^0 est un sous-groupe.

La conjugaison par $h \in H$ est aussi un homéomorphisme définissable de H, donc pour tout $h \in H$, $H^0 = h.H^0.h^{-1}$ ce qui revient à dire que H^0 est normal dans H.

Les translatés de H^0 dans H sont exactement les composantes définissablement t-connexes de H. Le nombre de translatés de H^0 dans H est donc le nombre de composante définissablement t-connexe de H qui est borné par le théorème 5.2.3. L'indice de H^0 dans H est donc borné.

Si H est normal dans G, pour tout $g \in G$, $gHg^{-1} = H$. Donc la conjugaison par g est un homéomorphisme définissable de H qui fixe l'identité. Par conséquent, $gH^0g^{-1} = H^0$ ce qui montre que H^0 est normal dans G. □

Dans ce théorème, nous utilisons la notion de localement connexe (voir définition 3.3.40).

Théorème 5.2.18. *Soit H un sous-groupe normal, type-définissable, définissablement t-connexe et d'indice borné. Le quotient G/H est localement connexe pour la topologie logique.*

Preuve. Le groupe G/H étant topologique, il suffit de montrer que tout voisinage ouvert U de l'identité dans G/H contient un voisinage connexe de l'identité (par le lemme 3.1.1). Notons μ la projection canonique $G \to G/H$.

L'ensemble $\mu^{-1}(U)$ est une petite union de sous-ensembles définissables de G, nous avons donc des $\mathcal{L}$-formules $\phi_i : i \in I$ (où I est petit) telles que $x \in \mu^{-1}(U) \leftrightarrow \bigvee_{i\in I} \phi_i(x)$. Comme H est type-définissable, nous avons de même $\psi_j : j \in J$ (où J est petit) telles que $x \in H \leftrightarrow \bigwedge_{j\in J} \psi_j(x)$.

Comme U contient l'identité de G/H, $H \subset \mu^{-1}(U)$. Autrement dit, $\bigwedge_{j\in J} \psi_j(x) \to \bigvee_{i\in I} \phi_i(x)$. Donc, l'ensemble $\{\psi_j(x), \neg\phi_i(x) : i \in I, j \in J\}$ est inconsistant. Par compacité, il existe un ensemble fini $I_0 \subset I$ tel que $\{\psi_j(x), \neg\phi_i(x) : i \in I_0, j \in J\}$ soit inconsistant. On a ainsi que $\bigwedge_{j\in J} \psi_j(x) \vdash \bigvee_{i\in I_0} \phi_i(x)$. L'ensemble $Y := \{x : \bigvee_{i\in I_0} \phi_i(x)\}$ est donc un ensemble définissable tel que $H \subset Y \subset \mu^{-1}(U)$. Soit Y^0 la composante définissablement t-connexe de l'identité dans Y. Comme H est définissablement t-connexe, par le lemme 5.2.2, on a que $H \subset Y^0$. Par le lemme 5.1.9, l'identité de G/H est dans l'intérieur de $\mu(Y0)$. Comme $Y^0 \subset Y \subset \mu^{-1}(U)$, $\mu(Y^0) \subset U$. De plus, par le lemme 5.2.14, $\mu(Y^0)$ est connexe. Donc, $\mu(Y^0)$ est bien un voisinage connexe de H qui est contenu dans U. Cela achève la preuve. □

Chapitre 6

Conjecture

Nous nous plaçons désormais dans $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure o-minimale qui élimine les imaginaires[1] et qui est κ-saturée pour $\kappa > |\mathcal{L}|$ un cardinal fortement inaccessible.

6.1 Conjecture de Pillay

Dans l'article [21], A. Pillay propose la conjecture suivante :

Conjecture 6.1.1. *Soit G un groupe (définissablement t-connexe) $\varnothing$-définissable. Alors*

(i) G possède un plus petit sous-groupe type-définissable d'indice borné, G^{00}.

(ii) G/G^{00} muni de la topologie logique est un groupe de Lie compact (et connexe).

(iii) Si G est définissablement compact, alors la dimension de G/G^{00} (en temps que groupe de Lie) est égale à la dimension o-minimale de G.

Remarque 6.1.2. Rappelons qu'un groupe définissable est définissablement t-connexe si et seulement s'il n'a pas de sous-groupe définissable d'indice fini.

Peu de temps après, dans l'article [1] (voir théorème 1.1), A. Berarducci, M. Otero, Y. Perterzil et A. Pillay donnent une preuve du théorème suivant, qui résout en partie la conjecture :

Théorème 6.1.3. *Soit G un groupe définissable. Alors, G a la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné, et*

[1]Pour l'élimination des imaginaires, voir paragraphe 1.2.

si G^{00} est le plus petit d'entre-eux, alors G/G^{00}, muni de la topologie logique est un groupe de Lie compact. De plus, si G n'a pas de sous-groupe définissable d'indice fini, alors G/G^{00} est connexe.

Ce théorème prouve exactement les assertions (i) et (ii) de la conjecture. L'assertion (iii) de la conjecture est démontrée notamment quand $\mathcal{M}$ est une expansion d'un corps réel clos (la dernière étape de la preuve est l'oeuvre de E. Hrushovski, Y. Peterzil et A. Pillay).

Proposition 6.1.4. *Soit G un groupe définissable (définissablement t-connexe) Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) G a la DCC sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné.

(ii) G^{00} existe, et G/G^{00} muni de la topologie logique est un groupe de Lie compact (connexe).

(iii) Pour tout sous-groupe type-définissable normal H d'indice borné de G, G/H muni de la topologie logique est un groupe de Lie compact (connexe).

Preuve. Par le lemme 5.2.13, si G est définissablement t-connexe nous avons que tous les quotients G/H où H est type-définissable d'indice borné sont connexes pour la topologie logique.

$(i) \to (ii)$: Supposons (i). Il est évident que G/G^{00} existe. Soit μ : $G \to G/G^{00}$ la projection canonique. Par le corollaire 3.3.39, nous savons que G/G^{00} est la limite projective d'un système dirigé $(G_i)_{i\in I}$ de groupes de Lie compacts. Soit $\nu_i : G/G^{00} \to G_i$ la surjection correspondante.
Nous avons donc une suite d'homomorphismes surjectifs continus :

$$G \xrightarrow{\mu} G/G^{00} \xrightarrow{\nu_i} G_i$$

Soit $H_i = ker(\nu_i \circ \mu)$, H_i est un sous-groupe type-définissable de G qui contient G^{00} (car l'image de G^{00} par μ est nulle) et est donc d'indice borné. On a également que $\bigcap_{i\in I} H_i = G^{00}$: si $x \in G \setminus G^{00}$, $\mu(x) = x.G^{00} \neq G^{00}$, comme $G/G^{00} = \lim G_i$, il existe $i \in I$ tel que $\nu_i(x.G^{00}) \neq 1$, ce qui signifie que $x \notin H_i$. Par ailleurs, (i) entraîne qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que $\bigcap_{i\in I} H_i = \bigcap_{i\in J} H_i$: si J n'existe pas, on peut trouver une chaîne infinie strictement décroissante de sous-groupes type-définissables $\mathfrak{H}_s := \bigcap_{r<s} H_r$ où $s \in \omega$. Comme $(G_i)_i$ est dirigé, il existe $i_0 \in I$ tel que $\bigcap_{i\in I} H_i = H_{i_0}$. Il s'en suit que $\nu_{i_0} : G/G^{00} \to G_{i_0}$ est un isomorphisme.

$(ii) \to (iii)$: Supposons (ii). Soit H un sous-groupe normal type-définissable de G, H/G^{00} est un sous-groupe normal fermé de G/G^{00}. La projection canonique $G/G^{00} \to (G/G^{00})/(H/G^{00}) \simeq G/H$ est continue. Le groupe G/H

est donc un groupe de Lie compact par 3.2.6 (H est fermé puisque type-définissable) et par le fait que l'image d'un compact par une application continue est compacte.

$(iii) \rightarrow (i)$: Par l'absurde, supposons (iii) et qu'il existe une chaîne strictement descendante $G = G_0 > G_1 > G_2 > \ldots$ de sous-groupes type-définissables d'indice borné. Par la remarque 5.2.9 (iii), nous pouvons supposer que les G_i sont des sous-groupes normaux de G. Soit $H := \bigcap_{i \in \omega} G_i$. Par définition, H est un sous-groupe normal, type-définissable et d'indice borné dans G. Par (iii), G/H est un groupe de Lie compact (pour la topologie logique). Soit $\mu : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Soit $H_i = \mu(G_i)$, les H_i/H constituent une chaîne infinie strictement descendante de sous-groupes fermés de G/H, ce qui contredit 3.2.5. □

6.2 Condition de chaîne descendante

Nous allons montrer le théorème 6.1.3, en montrant que G à la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné.

Lemme 6.2.1. *Soient G un groupe définissable et N un sous-groupe normal définissable de G. Si N et G/N ont tous deux la DCC sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné, alors G aussi.*

Preuve. Soient $H_1 < H_2$ des sous-groupes de G types-définissables et d'indices bornés dans G. On a clairement que $H_i \cap N$ et H_iN/N (où $i = 1, 2$) sont des sous-groupes définissables d'indices bornés de G et G/N (considéré comme un groupe définissable par l'élimination de imaginaires).

De plus, si $H_1 \cap N = H_2 \cap N$, alors on peut trouver un élément $x \notin N$ tel que $H_2 \setminus H_1$. Ce qui implique que $H_1N/N \subsetneq H_2N/N$ car x mod $N \in (H_2N/N) \setminus (H_1N/N)$. □

Lemme 6.2.2. *Soit G un groupe définissable non-commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) G ne possède pas de sous-groupe propre commutatif normal infini.

(ii) G ne possède pas de sous-groupe propre commutatif normal définissable infini.

Preuve. $(i) \rightarrow (ii)$ est évident.

Montrons donc que $(ii) \rightarrow (i)$.

Supposons que G possède un sous-groupe propre commutatif normal infini A. Nous allons construire dans G un sous-groupe propre commutatif normal infini.

Nous définissons le centralisateur de A dans G étant $C_G(A) = \{g \in G : \forall a \in A, [g,a] := g^{-1}a^{-1}ga = 1\}$. Comme A est commutatif, $A \subset C_G(A)$. De plus, $A \subset B \Rightarrow C_G(A) \supset C_G(B)$. Donc, $C_GC_G(A) \subset C_G(A)$. Par définition du centralisateur, nous avons également que $A \subset C_GC_G(A)$ (car pour tous $x, y \in G$, $[x,y] = 1 \Rightarrow [y,x] = 1$). Ainsi on obtient

$$A \subset C_GC_G(A) \subset C_G(A).$$

Nous allons montrer les assertions suivantes :

(a) Si N est normal dans G, $C_G(N)$ l'est aussi. (Donc, comme A est normal dans G, $C_GC_G(A)$ est normal dans G) ;

(b) $C_GC_G(A)$ est définissable ;

(c) $C_GC_G(A)$ est commutatif ;

(d) $C_GC_G(A)$ est un sous-groupe propre infini de G.

(a) Soient $g \in G$, $a \in C_G(N)$ et $n \in N$, comme N est normal dans G, $g^{-1}ng \in N$, donc $(gag^{-1})n = ga(g^{-1}ng)g^{-1} = g(g^{-1}ng)ag^{-1} = n(gag^{-1})$. Cela nous montre que $C_G(N)$ est normal dans G.

(b) Nous pouvons écrire le centralisateur de A comme une intersection de sous-groupes définissables dans G. Soit F l'ensemble des parties finies de A,

$$C_G(A) = \bigcap_{A_0 \in F} C_G(A_0).$$

Or nous savons par le lemme 4.2.20 que G à la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables. Donc, il existe $A_0 \in F$ tel que $C_G(A) = C_G(A_0)$, ce qui montre bien que $C_G(A)$ est définissable.

On montre en répétant cet argument que $C_GC_G(A)$ est définissable.

(c) Un sous-groupe $H \leq G$ est commutatif ssi $C_G(H) \supset H$. Or nous savons que $C_GC_G(A) \subset C_G(A)$, ce qui implique que $C_GC_GC_G(A) \supset C_GC_G(A)$. Le groupe $C_GC_G(A)$ est donc commutatif.

(d) Comme A est infini et $A \subset C_GC_G(A)$, $C_GC_G(A)$ est infini. De plus, comme G n'est pas commutatif, le groupe $C_GC_G(A)$ étant commutatif, il ne peut pas être égal à G.

Nous avons donc construit dans G un sous-groupe propre commutatif normal définissable infini, ce qui achève la preuve. □

Définition 6.2.3. Soit G un groupe définissable.

(i) Nous dirons que G est définissablement simple si G ne possède pas de sous-groupe définissable propre normal.

(ii) Nous dirons que G est semi-simple s'il ne possède pas de sous-groupe propre commutatif normal infini.

Preuve du théorème 6.1.3. Soit G un groupe définissable. Par la proposition 6.1.4, il suffit de montrer que G a la DCC sur les sous-groupes type-définissables d'indice borné.

Par trois étapes, nous allons montrer qu'il est possible de renforcer les hypothèses faites sur G sans pour autant perdre de généralité.

Etape 1. Nous pouvons supposer que G est définissablement t-connexe.

Preuve. Si G ne l'est pas, sa composante définissablement t-connexe G^0 est son plus petit sous-groupe définissable propre d'indice fini. De plus, G^0 est définissablement t-connexe et si G^0 a la DCC, il est clair que G aussi a la DCC. □

Etape 2. On peut supposer que G est commutatif.

Preuve. Nous allons construire récursivement une suite finie de sous-groupes définissables normaux de G :

$$\{1\} = N_0 < \cdots < N_k$$

tels que pour tout $i = 0, \ldots, k-1$, le quotient N_{i+1}/N_i soit commutatif et G/N_k soit semi-simple ou commutatif.

Par le lemme 6.2.1, cela sera suffisant d'avoir la DCC sur tous les N_{i+1}/N_i et sur G/N_k (ce sont des groupes définissables car $\mathcal{M}$ élimine les imaginaires).

Dans le cas où G est semi-simple, [17] (théorème 4.1) montre (en caractérisant les groupes semi-simples) qu'on peut se ramener au cas definissablement simple. Dans [21], proposition 3.6, Anand Pillay prouve complètement la conjecture 6.1.1 (et donc prouve aussi ce théorème) dans le cas où G est définissablement simple (et non commutatif).

Cela nous ramène bien au cas commutatif.

Voici donc la construction de cette suite de sous-groupes :
Si G est semi-simple ou commutatif, la suite se limite à $\{1\} = N_0$. Si G n'est ni semi-simple, ni commutatif, il possède par le lemme 6.2.2 un sous-groupe propre N_0 qui est commutatif normal définissable infini.

Comme N_0 est infini, $\dim(N_0) \geq 1$.

A chaque étape i, G/N_i est un groupe définissable (par l'élimination des imaginaires). S'il est semi-simple ou commutatif, la construction s'arrête, sinon, on itère la construction : on a un sous-groupe propre N_{i+1}/N_i de G/N_i qui est commutatif normal définissable infini. On obtient comme cela la suite de sous-groupes définissables souhaités.

Pour tout i, N_{i+1}/N_i est infini, par le lemme 2.4.12, $\dim(N_{i+1}) > \dim(N_i)$. La suite N_i est donc finie puisque G est de dimension finie. □

Par l'absurde, supposons que G soit définissablement t-connexe, commutatif et qu'il possède une chaîne infinie strictement descendante de sous-groupes type-définissables d'indice borné $H_1 > H_2 > \dots$

Etape 3. On peut supposer que le langage $\mathcal{L}$ est dénombrable et que tous les H_i (ainsi que G) sont type-définis sur une sous-structure élémentaire dénombrable $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$.

Preuve. Nous allons montrer, grâce au lemme 5.2.15, que nous pouvons supposer que les H_i sont type-définis par au plus $\aleph_0$ formules. En effet, si pour tout i, $H_i = \cap_{j \in J(i)} H_{ij}$ où les H_{ij} sont définis par au plus $\aleph_0$ formules, on peut poser $H'_1 := H_{1j_1}$ où j_1 est un élément (n'importe lequel) de $J(1)$. Il est clair que $H'_1 \supset H_1$ et nous allons supposer par hypothèse de récurrence que pour tout $1 < i < n$, $H_i \subset H'_{i-1}$.
Ensuite, nous posons $H'_n := H'_{n-1} \cap H_{nj_n}$ où j_n est tel que $H_{nj_n} \not\supseteq H_{n-1}$ (un tel j_n existe car la chaîne $H_1 > H_2 > \dots$ est strictement décroissante et $H_n = \cap_{j \in J(n)} H_{nj}$). Il est clair que $H'_n \subset H'_{n-1}$ et par le bon choix de j_n, $H'_n \subsetneq H'_{n-1}$. De plus, on a que $H'_n \supset H_n$ car $H_n \subset H_{n-1} \subset H'_{n-1}$ et $H_n \subset H_{nj_n}$ par construction.

Soit $\mathcal{L}'$ un sous-langage dénombrable de $\mathcal{L}$ tel que le symbole $<$ soit dans $\mathcal{L}'$, G est $\mathcal{L}'$-définissable (avec paramètres dans M éventuels) et toutes les formules (il n'y en a pas plus d'$\aleph_0$) qui apparaissent dans la définition des H_i sont des $\mathcal{L}'$-formules (à paramètres dans M). Bien sûr, nous pouvons trouver une structure dénombrable $\mathcal{M}_0 \prec (M, \mathcal{L}')$ telle que G et tous les H_i soient (type-)définis sur M_0. □

Soit H le plus petit sous-groupe de G d'indice borné qui est type-définissable sur M_0. Ce groupe H existe par la proposition 5.2.12, et est parfois noté $G^{00}_{M_0}$.

Désormais, nous prendrons une notation additive pour l'opération de G.

Lemme 6.2.4. *H est divisible et définissablement t-connexe.*

Preuve. Par le corollaire 4.3.9, pour tout $n \geq 1$, G n'a qu'un nombre fini d'élements d'ordre n. Par conséquent, l'application $n : G \to G : x \mapsto n.x$ est de noyau fini (disons de cardinalité l). Notons $G[n]$ ce noyau.

Les éléments de G étant des éléments de M^k, nous pouvons les ranger par ordre lexicographique. Nous avons donc pour tout $i = 1, \dots, l$ une $\mathcal{L}$-formule du premier ordre telle que $\phi_i(x) \equiv$ "$x \in G$ et x est le i^{e} élément de sa classe modulo $G[n]$".

Comme $G = \bigcup_{i=1}^{l} \phi_i(M^k)$, on en déduit qu'il existe $j \in \{1, \dots, l\}$ tel que $\dim(\phi_j(M^k)) = \dim(G)$. De plus, la bijection définissable $x \mapsto n.x$: $\phi_j(M^k) \to nG$ nous assure que $\dim(\phi_j(M^k)) = \dim(nG)$. D'où $\dim(G) =$

$\dim(\phi_j(M^k)) = \dim(n.G)$. On en déduit que $[G : nG]$ est fini (sinon on a une relation d'équivalence dont une infinité de classes sont de même dimension que G, ce qui contredit 2.4.12). Comme G est définissablement t-connexe, on en déduit que $nG = G$ (car G ne possède pas de sous-groupe propre définissable d'indice fini).

Autrement dit, G est divisible.

Pour tout n, nH est type-définissable sur M_0. De plus, nous avons une surjection

$$G/H \twoheadrightarrow nG/nH : g + H \mapsto ng + nH.$$

Cette application est bien définie car $g_1 - g_2 \in H \Rightarrow (ng_1 - ng_2) = n(g_1 - g_2) \in nH$. Par conséquent $[G : H] \geq [nG : nH] = [G : nH]$. L'indice de nH dans G est donc borné. Comme $nH \subset H$, on en déduit que $nH = H$ (car H est le plus petit sous-groupe d'indice borné type-définissable sur M_0), ce qui montre déjà que H est divisible.

Par le théorème 5.2.17, la composante définissablement t-connexe de 0 dans H est un sous-groupe type-définissable de H d'indice borné et type-défini sur M_0. Donc ce groupe est égal à H qui par conséquent est définissablement t-connexe. □

Lemme 6.2.5. *G/H est un groupe de Lie compact.*

Preuve. Comme $\mathcal{L}$ est dénombrable et H est type-défini sur M_0 qui est dénombrable, par le lemme 5.1.7, G/H possède une base dénombrable.

Comme H est définissablement t-connexe, par le théorème 5.2.18, G/H est localement connexe. Comme nous avons supposé que G est définissablement t-connexe, par le lemme 5.2.13, G/H est connexe. Nous avons donc toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer le fait 3.3.42 sur le groupe G/H, qui est donc un produit dénombrable de copies de $\mathbb{S}^1$.

Nous allons montrer que G/H n'a qu'un nombre fini d'éléments d'ordre 2, ce qui entraînera que G/H est un produit fini de copies de $\mathbb{S}^1$ et terminera la preuve du lemme. Si nous avons dans G/H un élément $a + H$ d'ordre 2, cela veut dire que $2a \in H$ et comme H est divisible, on peut trouver $h \in H$ tel que $2h = 2a$. Nous avons donc que $2.(a - h) = 0$ ce qui nous donne un élément d'ordre 2 qui appartient au translaté $a + H$. Donc si G/H contient une infinité d'éléments d'ordre 2 (disons $a_i.H : i < \omega$) alors G aussi (au moins un dans chaque $a_i.H$), ce qui contredit le corollaire 4.3.9. □

Les sous-groupes H_i/H de G/H forment une chaîne infinie décroissante de sous-groupes fermés de G/H ce qui contredit la proposition 3.2.5 puisque G/H est un groupe de Lie compact. □

Bibliographie

[1] A. Berarducci, M. Otero, Y. Peterzil et A. Pillay, *A descending chain condition for groups definable in o-minimal structures*, Annals of Pure and Applied Logic 134 (2005) 303-313.

[2] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Topologie Générale*, Hermann, Paris, 1971.

[3] P. M. Cohn, *Algebra vol. 2*, John Wiley & Sons, 1977.

[4] P. M. Cohn, *Lie Groups*, Cambridge University press, 1968.

[5] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University press, 1998.

[6] L. van den Dries, *Type-definable sets and their quotients*, disponible sur http ://www.math.uiuc.edu/∼vddries.

[7] A. M. Gleason, *Groups without Small Subgroups*, The Annals of Mathematics 56 (1952), 193-212.

[8] P. J. Higgins, *An Introduction to topological groups*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, 1974.

[9] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge University press, 1993.

[10] K. H. Hofmann et S. A. Morris, *The structure of compact groups*, de Gruyter, 1998.

[11] J. Knight, A. Pillay et C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures II*, Transactions of the American Mathematical Society 295 (1986) 593-605.

[12] D. Lascar, *Stabilité en théorie des modèles*, Cabay Librairie-Editeur, Louvain-la-Neuve, 1986.

[13] N. Mariaule, *A propos des groupes et corps définissables dans les structures o-minimales*, notes sur l'article de Pillay.

[14] D. Marker, *Model theory : An introduction*, Springer-Verlag, 2002.

[15] D. Montgomery et L. Zippin, *Small subgroups of finite-dimensional groups*, The Annals of Mathematics 56 (1952) 213–241.

[16] D. Montgomery et L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[17] Y. Peterzil, A. Pillay et S. Starchenko, *Definably simple Groups in o-minimal structures*, Transactions of the American Mathematical Society 352 (2000) 4397-4419.

[18] A. Pillay, *First order topological structures and theories*, Journal of Symbolic Logic 52 (1987) 763-778.

[19] A. Pillay, *On groups and fields definable in o-minimal structures*, Journal of Pure Applied Algebra 53 (1988), 239-255.

[20] A. Pillay, *Some remarks on definable equivalence relations in o-minimal structures*, Journal of Symbolic Logic 51 (1986) 709-714.

[21] A. Pillay, *Type-definability, compact Lie groups, and o-minimality*, Journal of Mathematical Logic 4 (2004), 147-162.

[22] L. S. Pontryagin, *Topological Groups*, Princeton University Press, 1946.

[23] J. F. Price, *Lie Groups and compact groups*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University press, 1977.

[24] A. Robinson, *A note on topological model theory*, Fundamenta mathematicae 81 (1974), 159-171.

[25] A. Strzebonski, *Euler characteristic in semialgebraic and other o-minimal groups*, Journal of Pure Applied Algebra 96 (1994), 173-201.

[26] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function*, Journal of the American Mathematical Society 9 (1996) 1051-1094.