UNIVERSITEIT GENT

Faculteit Wetenschappen

Vakgroep Zuivere Wiskunde en Computeralgebra

Axiomatische Benaderingen van Niet-Standaard Analyse

door

Jeroen Van der Meeren

Promotor: Prof. Dr. H. Vernaeve

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de wiskunde, afstudeerrichting Zuivere Wiskunde.

Academiejaar 2010–2011

Words are not enough to describe reality[1]

[1]citaat uit [2].

Voorwoord

Logica, Analyse en Bewijstheorie zijn domeinen in de wiskunde die mij al sinds lange tijd interesseren. Ik heb voor het eerst kennisgemaakt met niet-standaard/infinitesimale analyse in de cursus Capita Selecta in Mathematical Research. Ik vond dit interessant en heb dan ook besloten mijn masterproef in dit domein te maken. Om er Logica in te betrekken, heb ik samen met mijn promotor Prof. H. Vernaeve besloten om axiomatische benaderingen van niet-standaard analyse te behandelen. Dit leidde er toe mij te begeven in de, voor mij nog redelijk onbekende, wereld van verzamelingenleer.

Om een basis te creëren heb ik me allereerst verdiept in de axiomatische benaderingen van niet-standaard analyse Internal Set Theory (IST) en Bounded Set Theory (BST). Deze masterproef zelf is een beschrijving van de axiomatische benadering Hrbaček Set Theory (HST). Het hoofddoel van deze masterproef was een algemene goede inleiding geven op HST en bekijken hoe men dit kan gebruiken voor niet-standaard analyse (Hoofdstuk 1 en 2). Daarnaast wou ik weergeven hoe het machtsverzamelingsprobleem in HST kan behandeld worden (zie Hoofdstuk 4).

De lezer wordt verwacht al wat bekend te zijn met niet-standaard analyse en met de axioma's van ZFC. Zie de bijlagen voor een korte beschrijving van deze materie. Voor een uitgebreidere uiteenzetting verwijs ik naar de literatuur (bijvoorbeeld [5], [10]). Ik heb getracht deze masterproef zo consistent mogelijk te maken, zonder al te veel verwijzingen naar bijvoorbeeld ZFC.

Ik zou graag mijn dank betuigen aan volgende mensen:

- Mijn promotor Prof. H. Vernaeve, voor het goed begeleiden van mijn opdracht en voor het wekken van mijn interesse in de niet-standaard analyse.
- Prof. M. Reeken en Dr. U. L. Clotz van Universiteit Wuppertal (Duitsland), voor de goede gesprekken over Hrbaček Set Theory tijdens hun bezoek aan de Ugent. Bovendien wil ik Prof. M. Reeken bedanken voor het interessante e-mailverkeer.
- Mijn ouders en vriendin, voor hun steun tijdens het werken en schrijven aan deze masterproef en het verbeteren van eventuele schrijffouten.

Toelating tot bruikleen

Inhoudsopgave

Inleiding

In de modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse[2] probeert men een niet-triviale uitbreiding te definiëren van de reële getallen/analyse waarin dezelfde rekenkundige wetten gelden (zie Bijlage C). Hierdoor kan men nieuwe inzichten verwerven in de gewone klassieke analyse. Deze modeltheoretische benadering ontstond onder invloed van Skolem in het jaar '34. Hij ontwikkelde een niet-standaard model voor de Peano Rekenkunde. In de jaren '60 heeft Robinson deze benadering uitgebreid tot een niet-standaard model voor de reële analyse. In zo'n niet-standaard model werken ze met de bovenbouwen[3] van $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$. Een bovenbouw stelt een verzameling voor waarin alle klassieke objecten zitten waarmee men wiskunde doet in de analyse, onder andere functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Er is dus voldoende flexibiliteit om er analyse in te beoefenen.

In de modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse wordt nooit het feit gebruikt dat reële getallen eigenlijk verzamelingen zijn. Men beschouwt ze als 'atomen' (elementloze objecten). Men kan dit zien als een voordeel, maar ook als een nadeel aangezien men de 'verzamelingsstructuur' verliest. Bijvoorbeeld hebben alle verzamelingen in de bovenbouw van $\mathbb{R}$ een eindige rang, omdat we met atomen werken. Daardoor is het Oneindigheidsaxioma van ZFC niet geldig in de bovenbouw van $\mathbb{R}$. (De Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer met het Keuze-axioma (ZFC) is de verzamelingenleer waarmee de meeste wiskundigen werken, al dan niet bewust. Zie Bijlage B.) In Stelling C.3.1 wordt zelfs aangetoond dat dit zo is in elke modeltheoretische benadering. Bovenbouwen modelleren dus slechts een deel van de theorie ZFC. Bovendien verliest men de structuur van het ontstaan van de reële getallen als verzamelingen, indien we ze beschouwen als atomen. (Reële getallen ontstaan als Dedekind snedes uit $\mathbb{Q}$.)

De modeltheoretische benadering heeft echter nog een ander nadeel. Voor bepaalde toepassingen van niet-standaard analyse zijn specifieke modellen nodig (bijvoorbeeld: soms moet uw model voldoende gesatureerd zijn[4]), zodat er niet één specifiek niet-standaard model bestaat die alles omvat. Bovendien is het wenselijk (filosofisch gezien) om alle niet-standaard technieken in één axiomatische theorie te stoppen.

Filosofisch gezien heeft de modeltheoretische benadering het nadeel dat de verzamelingenleer in zekere zin gescheiden wordt van de wiskundige praktijk. Door gebruik te maken van de verzamelingenleer construeren we verscheidene niet-isomorfe modellen van eenzelfde

[2] Ook 'infinitesimale analyse' genoemd.

[3] In het Engels *superstructures*.

[4] Zie Bijlage C voor een definitie van saturatie.

structuur, waarin de wiskundigen werken. De verzamelingenleer wordt dus louter gebruikt voor het construeren van deze vele artificiële modellen en niet meer om echt in te werken. Dit leidde tot de ontwikkeling van verscheidene niet-standaard verzamelingentheorieën die de essentiële uniciteit van wiskundige structuren herstellen. (In HST bijvoorbeeld zal er maar één structuur $^*\mathbb{R}$ zijn.)

Een verzamelingentheorie heeft de belangrijke eigenschap dat het de uniciteit wilt vastleggen van fundamentele wiskundige objecten. Een verzamelingentheorie is dan ook ontwikkeld om structuren en modellen te onderzoeken. Een verzamelingenleer kan modellen van zichzelf bestuderen, terwijl de gewone rekenkunde dit niet kan. In een verzamelingenleer kan men in feite zoveel meer doen dan in de klassieke analyse. De bedoeling van niet-standaard verzamelingentheorieën is de verzamelingenleer herintroduceren door middel van de fundamentele notie van niet-standaard analyse toe te voegen en bovendien wilt men de uniciteit van niet-standaard modellen vastleggen. Het is een soort analogon van de modeltheoretische benadering van de niet-standaard analyse voor de *volledige* verzamelingenleer. Met andere woorden: men wenst een axiomatische theorie T die een niet-standaardbenadering van de verzamelingenleer ZFC en de theorie ZFC zelf bevat. Met dit laatste bedoelen we dat het universum van de volledige theorie T een deelklasse bevat die een ZFC-universum is. Deze deelklasse laten we corresponderen met de 'traditionele' gewone wiskunde[5], zodat T een theorie is die zowel de traditionele als de niet-standaard wiskunde omvat en waarbij deze door middel van een principe (het Overdrachtsprincipe) in elkaar kunnen worden omgezet.
Zo'n axiomatisch systeem kan gebruikt worden voor twee verschillende doelen. Het kan gebruikt worden voor het bestuderen van metawiskundige problemen in/van ZFC of het kan gebruikt worden als een hulpmiddel voor de "werkende wiskundige"die meestal in ZFC werkt (al dan niet bewust). In deze masterproef zijn we vooral geïnteresseerd in het laatste. Het zorgt ervoor dat we een andere manier hebben om de gewone verzamelingenleer te bekijken en intuïtiever te benaderen. Hierdoor kan men nieuwe inzichten verwerven in de traditionele wiskunde. Sommige problemen worden eenvoudiger als we ze niet-standaard benaderen, waardoor men sneller tot een oplossing komt.

Natuurlijk rest de vraag of zo'n axiomatische theorie die ZFC 'uitbreidt' kan bestaan. De modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse ontstond onder invloed van Skolem, die bewees dat de eerste-orde Peano rekenkunde niet de notie van een 'natuurlijk getal', op isomorfie na, kan vastleggen. Daardoor bestaan er ook andere modellen van de Peano rekenkunde, deze worden niet-standaard modellen genoemd, naast het gewone model (de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$). Hetzelfde geldt ook voor de eerste-orde theorie ZFC. Het probleem in ZFC is de notie van oneindigheid: een eerste-orde theorie kan nooit de notie van eindigheid en oneindigheid intrinsiek vastleggen. ZFC kan dus nooit vastleggen

[5]Merk op dat de traditionele gewone wiskunde vervat zit in de verzamelingenleer ontwikkeld door Zermelo en Fraenkel: ZFC (zie Bijlage B voor de axioma's). Bijvoorbeeld kan men een reële functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ zien als een verzameling bestaande uit koppels $(a, f(a))$. Deze koppels zijn zelf ook verzamelingen (ontwikkeld door Kuratowski in 1912: $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$).

hoe 'groot' de verzameling van de natuurlijke getallen daadwerkelijk is. Daarmee bedoelen we dat dit onuitdrukbaar is in ZFC.
Beschouw twee verschillende ZFC-universa $\mathbb{V}_1$ en $\mathbb{V}_2$ en stel dat $\mathbb{V}_2$ de grootste van de twee is[6]. In $\mathbb{V}_1$ en $\mathbb{V}_2$ is $\omega = \mathbb{N}$ uniek bepaald als het kleinste limietordinaal, maar de 'grootte' (metawiskundig bekeken) van ω is daarom niet hetzelfde. ZFC kan dus niet bepalen hoe 'groot' een oneindige verzameling is. De 'grootte' van $\mathbb{N}$ kan echter zichtbaar worden op een omslachtige wijze, namelijk door de niet-standaard modellen. Een niet-standaard model, dat we in ZFC construeren, correspondeert op een of andere wijze met een zekere graad van oneindigheid. Alle niet-standaard modellen samen laten de volledige oneindigheid zien, maar dit kan echter niet in één keer gezien worden.
Traditionele wiskunde werkt gelukkig vooral met objecten die uniek gedefinieerd zijn en net die objecten komen zowel voor in $\mathbb{V}_1$ als in $\mathbb{V}_2$. In beide universa $\mathbb{V}_1$ en $\mathbb{V}_2$ komt ω voor, maar doordat $\mathbb{V}_2$ groter is dan $\mathbb{V}_1$, kunnen er meer elementen zitten in ω in het universum $\mathbb{V}_2$ dan in het universum $\mathbb{V}_1$. Stel dat we aannemen dat de traditionele wiskunde, waarmee 'gewone' wiskundigen werken, overeenkomt met het kleinste universum $\mathbb{V}_1$. Alle objecten die uniek gedefinieerd zijn in $\mathbb{V}_1$ komen ook voor in het grotere universum $\mathbb{V}_2$. Er is dus een bijectieve relatie tussen *deze* objecten in $\mathbb{V}_1$ en $\mathbb{V}_2$. We nemen aan dat we deze bijectie kunnen uitbreiden naar alle objecten van $\mathbb{V}_1$, zodat we een injectie $*$ verkrijgen van $\mathbb{V}_1$ in $\mathbb{V}_2$, naar analogie met de modeltheorie. De beelden van deze afbeelding in $\mathbb{V}_2$ worden standaard genoemd. De overige objecten in $\mathbb{V}_2$ worden niet-standaard genoemd. Hoe deze standaard elementen in $\mathbb{V}_2$ zich gedragen is natuurlijk niet duidelijk. Dit kan vastgelegd worden door nieuwe axioma's. We zien zo een niet-standaard verzamelingentheorie ontstaan.

Een aantal bekende niet-standaard verzamelingentheorieën die dit doen zijn bijvoorbeeld IST, BST en HST. Één van de doelen van het ontwikkelen van niet-standaard verzamelingentheorieën is om de axioma's van de verzamelingenleer zo te veranderen, dat we verschillende soorten van eindig- en oneindigheid kunnen terugvinden in de theorie zelf. Zoals eerder gezegd wilt men bovendien dat ZFC (of toch een deel van ZFC) op intrinsieke wijze vervat zit in een niet-standaard verzamelingentheorie. Meestal is de klasse van alle standaard verzamelingen, $\mathbb{S}$, een interpretatie van ZFC in de theorie. $\mathbb{S}$ komt dus overeen met $\mathbb{V}_1$ uit de vorige paragraaf.
IST en BST zijn theorieën die een uitbreiding zijn van ZFC. (Zie bijvoorbeeld [7].) Ze hebben een aantal extra axioma's die het predikaat 'standaard' mogen bevatten. Zowel IST als BST zijn interne theorieën: ze leggen externe verzamelingen niet vast op een intrinsieke manier[7]. Modeltheoretisch gezien zijn externe verzamelingen nodig voor interessante

[6]We kijken buiten $\mathbb{V}_1$ en $\mathbb{V}_2$ om na te gaan welke de grootste is. We bekijken het metawiskundig. Bijvoorbeeld zullen we zien dat $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ twee ZFC-universa zijn in HST waarvoor $\mathbb{I}$ de grootste van de twee is.

[7]Interne theorieën gaan er van uit dat de verzamelingen in hun universum allemaal intern zijn (denk aan de modeltheoretische benadering voor het concept 'intern'). IST en BST leggen externe verzamelingen niet vast met hun axioma's. Men kan in sommige gevallen van toepassingen externe verzamelingen definiëren in IST en BST door middel van metawiskunde. (In IST lukt dit bijvoorbeeld niet in het geval van de

constructies, bijvoorbeeld de Loeb-maat. IST is de populairste theorie van de interne theorieën onder de werkende wiskundigen. Er is echter een grote keerzijde aan deze interne theorie: het Separatie-axioma is niet geldig voor alle st-$\in$-formules, zodat bijvoorbeeld de collectie van alle standaard elementen van een verzameling niet altijd een verzameling is. Ook metawiskundig gezien is IST niet zo goed: IST is "sterker"dan ZFC, aangezien niet elk model van ZFC kan ingebed worden, als de klasse van de standaard verzamelingen, in een model van IST. Dus IST "weet" iets over het standaard universum dat ZFC niet weet over haar universum.
BST is een interne theorie die ontstaat uit IST door een kleine aanpassing in de axioma's, maar die haar beter maakt met betrekking tot ZFC.
HST kan men zien als een uitbreiding van BST die ook rekening houdt met externe verzamelingen (op een intrinsieke manier), maar waarbij het volledige universum van HST niet voldoet aan de axioma's van ZFC[8]. (Het interne universum van HST voldoet wel aan de axioma's van ZFC.) Zowel de modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse als de BST-benadering zitten vervat in de theorie HST.

Om zinvol te zijn moet een niet-standaard verzamelingenleer altijd aan een aantal (filosofische) eisen voldoen.[9] We willen bijvoorbeeld dat onze theorie *consistent* is. Dit betekent dat er een structuur bestaat die aan de axioma's van de theorie voldoet.
In het universum van verzamelingen van onze theorie zou er een deeluniversum moeten bestaan (meestal $\mathbb{S}$) dat overeenkomt met de traditionele wiskunde. We willen dat $\mathbb{S}$ dezelfde elementen bevat als de traditionele wiskunde: er zouden geen 'nieuwe' standaard objecten mogen ontstaan in onze nieuwe theorie, want dan krijgen we een nieuwe 'standaard' wiskunde (wat niet wenselijk is). Bovendien wilt men dat de bewijsbare stellingen over $\mathbb{S}$ (die uitgedrukt worden in de $\in$-taal) in de niet-standaard verzamelingentheorie ook bewijsbaar zijn in ZFC en omgekeerd. Dit wordt de *conservativiteit* van de niet-standaard verzamelingentheorie genoemd.
Conservativiteit zorgt er enkel voor dat bewijsbare waarheden van ZFC kunnen omgezet worden, maar dit zegt niets over onbewijsbare waarheden. We wensen een verband tussen de waarheid in ZFC en de waarheid in de niet-standaard verzamelingentheorie, anders zou de niet-standaard verzamelingenleer een andere kijk hebben op het traditionele universum, ook al bewijst ze dezelfde stellingen als ZFC. Dit kan gedaan worden via de notie *interpreteerbaarheid*. Die zorgt ervoor dat men het ZFC-universum kan uitbreiden tot een universum van de niet-standaard verzamelingentheorie.
De *reducibiliteitseigenschap* gaat een stapje verder dan de conservativiteitseigenschap: deze eigenschap zorgt ervoor dat de niet-standaard verzamelingentheorie niets méér zegt over de traditionele wiskunde in de uitgebreide taal (de st-$\in$-taal) dan dat het ook uitdrukbaar is in de interne, gewone taal (de $\in$-taal). De niet-standaard verzamelingentheorie bewijst

Loebmaat. In BST kan men het probleem van externe verzamelingen oplossen tot een zeker niveau.) Er kunnen echter problemen ontstaan door het onzorgvuldig door elkaar gebruiken van metawiskunde en gewone wiskunde.

[8]Dit is onmogelijk omwille van de paradox van Hrbaček. Dit zullen we later bewijzen.

[9]We verwijzen naar Hoofdstuk 3 voor een concretere definitie van de volgende gebruikte noties.

dus evenveel als ZFC, zelfs als we kijken naar de uitgebreide taal van de niet-standaard verzamelingentheorie. De niet-standaard verzamelingentheorie is in feite niets anders dan een hulpmiddel om beter inzicht te krijgen in de traditionele wiskunde. De meeste niet-standaard verzamelingentheorieën zijn conservatieve, consistente uitbreidingen van ZFC.

HST is één van de vele niet-standaard verzamelingentheorieën, maar de positie van HST met betrekking tot ZFC is uniek. Er bestaat namelijk een standaard kern-interpretatie van HST in ZFC. Bovendien voldoet HST samen met het Constructibiliteitsaxioma aan de reducibiliteitseigenschap. Hierdoor is de positie van HST samen met het Constructibiliteitsaxioma ten opzichte van ZFC dezelfde als de positie van $\mathbb{C}$ ten opzichte van $\mathbb{R}$. Ingenieurs werken met $\mathbb{C}$, ook al heeft $\mathbb{C}$ geen fysische betekenis. Indien we werken in HST met het Constructibiliteitsaxioma, kunnen we op het einde van een redenering/bewijs, alles vertalen naar ZFC. Men doet de vertaling niet in het begin van de redenering, want dan verliezen we de intuïtie achter het bewijs. HST is ook een niet-standaard verzamelingentheorie die rekening houdt met externe verzamelingen: het breidt de interne theorie BST uit. BST is in zekere zin één van de betere interne theorieën.
Andere niet-standaard verzamelingentheorieën dan HST overtreffen in zekere zin ZFC. Sommigen bewijzen zelfs de consistentie van ZFC en zijn dus sterker. Omdat er zoveel niet-standaard verzamelingentheorieën zijn, rijst natuurlijk de vraag welke de doorsnee wiskundige[10] moet gebruiken. Er is echter geen goed antwoord op deze vraag, maar toch steekt HST er een stuk met de schouders bovenuit: HST heeft een unieke positie met betrekking tot ZFC. Bovendien heeft HST veel beter verzamelingstheoretisch gereedschap dan de interne theorieën IST en BST. (Bijvoorbeeld kan men het 'forcing'-principe toepassen in HST en kan men de 'isomorfisme eigenschap' consistent toevoegen aan HST.)

Deze masterproef is een beschrijving van Hrbaček Set Theory (HST). Het hoofddoel is een algemene goede inleiding geven op HST en bekijken hoe men dit kan gebruiken voor niet-standaard analyse. Daarnaast willen we ook weergeven hoe het machtsverzamelingsprobleem in HST kan behandeld worden[11]. We geven nu een kort overzicht van de hoofdstukken.
In Hoofdstuk 1 worden de axioma's van HST gedefinieerd en wordt er uitgebreid op de eigenschappen van HST ingegaan. Bijvoorbeeld wordt er een $\in$-isomorfisme gelegd tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{S}$, wordt de Von Neumann hiërarchie besproken, wordt er aandacht besteed aan ordinalen en kardinalen in HST en wordt de paradox van Hrbaček besproken met bijhorende uiteenzetting van de notie van een verzameling van standaard grootte.
In Hoofdstuk 2 geven we een uiteenzetting van hoe men analyse uitoefent in HST en hoe men eventueel het Machtsverzamelingsaxioma moet omzeilen.
In Hoofdstuk 3 wordt het constueerbare universum in $\mathbb{H}$ behandeld en geven we enkele metawiskundige eigenschappen.
In Hoofdstuk 4 bestuderen we partieel gesatureerde theorieën, die voldoen aan het Machts-

[10]Die bijvoorbeeld ZFC gebruikt.
[11]In HST is het Machtsverzamelingsaxioma niet geldig.

verzamelingsaxioma, en bekijken we hoe men deze kan benaderen met HST.
We verwachten dat de lezer al wat bekend is met niet-standaard analyse en met de axioma's van ZFC. We verwijzen naar de bijlagen voor een korte beschrijving van deze materie. Voor een uitgebreidere uiteenzetting verwijzen we naar de literatuur (bijvoorbeeld [5], [10]).

Hoofdstuk 1

Inleiding tot Hrbaček Set Theory

1.1 Definities en axioma's

Hrbaček Set Theory, hierna afgekort tot HST, is ontstaan uit $\mathrm{NS}_1(\mathrm{ZFC})$. $\mathrm{NS}_1(\mathrm{ZFC})$ is een theorie geïntroduceerd door K. Hrbaček in 1978 ([3]). HST is ontwikkeld om de modeltheoretische benadering te vervangen. In feite zijn er vele niet-standaard verzamelingentheorieën, maar de metawiskundige positie van HST met betrekking tot ZFC is uniek. Voor meer informatie over metawiskundige eigenschappen verwijzen we naar Hoofdstuk 3.

HST kan men zien als een axiomatisch systeem dat ervoor zorgt dat men op intrinsieke, axiomatische wijze externe verzamelingen toevoegt aan een interne theorie, hier BST. Zoals in de inleiding gezegd werd, zijn de doelen van een niet-standaard verzamelingentheorie, en dus ook van HST, het bestuderen van problemen in ZFC en het gebruiken ervan als universum voor de "werkende wiskundige", net zoals men ZFC gebruikt (al dan niet bewust). We zijn vooral geïnteresseerd in dit laatste.

Er zijn verschillende klassen van axioma's in HST: axioma's voor de interne verzamelingen en de standaard verzamelingen, axioma's voor alle verzamelingen en axioma's voor verzamelingen van 'standaard grootte'.

1.1.1 Definitie. De taal $\mathcal{L}$ van de theorie HST bestaat uit het unaire predicaat 'st', het binaire predicaat '$\in$' en de gebruikelijke logische connectoren en kwantoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.[1] Natuurlijk bevat de taal ook het binaire predicaat '$=$'. We noemen deze taal de st-$\in$-taal.

Met deze taal kunnen we termen en formules invoeren, zoals uitgebreid wordt uitgelegd in Bijlage A. Een formule waar geen 'st' in voorkomt wordt een $\in$-formule genoemd. Komt 'st' er wel in voor, dan wordt de formule een st-$\in$-formule genoemd.

[1] '$A \leftrightarrow B$' is een afkorting voor '$A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$'. Ook noteren we $\leftrightarrow$ als $\Leftrightarrow$.

Om correct te zijn moeten we eerst een lijst geven van alle axioma's in HST en dan $\mathbb{H}$ gelijkstellen aan het HST-universum. Daarna kunnen we alle axioma's uitgebreid bespreken, eventueel gebruik makend van $\mathbb{H}$. Om het overzichtelijk te houden, geven we deze lijst niet in één keer, maar geven we bij elk axioma meteen bijkomende uitleg. We gaan er van uit dat we $\mathbb{H}$ reeds hebben bij de informele bespreking.[2]

1.1.2 Definitie. $\mathbb{H}$ is de notatie voor het universum van HST. De elementen van $\mathbb{H}$ worden externe verzamelingen genoemd.[3]

1.1.3 Definitie. Zij $\Phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ een st-$\in$-formule met $x, x_1, \ldots, x_n$ vrije variabelen van Φ. Zij $p_1, \ldots p_n$ verzamelingen in $\mathbb{H}$. Een **klasse** (in $\mathbb{H}$) is een collectie van verzamelingen $\mathbb{A} = \{x \mid \Phi(x, p_1, \ldots, p_n)\}$.[4] Een klasse is dus in feite niets anders dan een formule $\Phi(x, p_1, \ldots, p_n)$, waarbij $p_1, \ldots, p_n$ parameters worden genoemd[5]. Voor elke klasse $\mathbb{A}$ bestaat er dus een st-$\in$-formule die uitdrukt dat '$x \in \mathbb{A}$'. We zeggen dat de klasse $\mathbb{A}$ st-$\in$-definieerbaar is door de formule Φ. Meestal worden de parameters in Φ niet meegeschreven. Een klasse $\mathbb{A}$ wordt $\in$-definieerbaar genoemd indien er een $\in$-formule Φ bestaat zodat $\mathbb{A} = \{x \mid \Phi(x)\}$. Merk op dat elke verzameling X een klasse is in $\mathbb{H}$, door middel van de formule $\Phi(x) \equiv x \in X$.

1.1.4 Definitie. Definieer de klasse $\mathbb{S}$ als de klasse van de standaard verzamelingen, m.a.w. $\mathbb{S} := \{x \mid \mathrm{st}\,(x)\}$.

De klasse $\mathbb{S}$ is st-$\in$-definieerbaar.

1.1.5 Notatie. We korten de formule $\exists x(\mathrm{st}\, x \wedge \phi)$ af tot de formule $\exists^{\mathrm{st}} x(\phi)$ en de formule $\forall x(\mathrm{st}\, x \to \phi)$ tot de formule $\forall^{\mathrm{st}} x(\phi)$.

1.1.6 Definitie. Een verzameling y wordt intern genoemd als y voldoet aan de formule $\mathrm{int}(y) = \exists^{\mathrm{st}} x(y \in x)$. De klasse van alle interne verzamelingen wordt genoteerd als $\mathbb{I}$.

De klasse $\mathbb{I}$ is st-$\in$-definieerbaar. In Paragraaf 1.3.4 zullen we zien dat $\mathbb{I}$ zelfs $\in$-definieerbaar is. Indien we de $\in$-definieerbaarheid van $\mathbb{I}$ beschouwen, verliezen we echter de intuïtie achter $\mathbb{I}$: namelijk dat de interne verzamelingen juist de elementen van de standaard verzamelingen zijn.

1.1.7 Notatie. We korten de formule $\exists x(\mathrm{int}\, x \wedge \phi)$ af tot de formule $\exists^{\mathrm{int}} x(\phi)$ en de formule $\forall x(\mathrm{int}\, x \to \phi)$ tot de formule $\forall^{\mathrm{int}} x(\phi)$.

---

[2] Men kan aantonen dat HST equiconsistent is met ZFC, dat wil zeggen dat als er een structuur bestaat die aan de axioma's van ZFC voldoet, er ook een structuur bestaat die aan de axioma's van HST voldoet; en omgekeerd als er een structuur bestaat die aan de axioma's van HST voldoet, er ook een structuur bestaat die aan de axioma's van ZFC voldoet.

[3] Soms bedoelen we met extern: 'niet-intern'.

[4] $\Phi(x, p_1, \ldots, p_n)$ is een $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}$-formule, zie Bijlage A.

[5] Parameters zijn elementen van $\mathbb{H}$ die in de vrije variabelen van een formule worden gezet.

Algemeen korten we, voor een (st-$\in$-definieerbare) klasse $\mathbb{A}$ van $\mathbb{H}$, de formule $\exists x(x \in \mathbb{A} \wedge \phi)$ af tot de formule $\exists^{\mathbb{A}} x(\phi)$ en de formule $\forall x(x \in \mathbb{A} \rightarrow \phi)$ tot de formule $\forall^{\mathbb{A}} x(\phi)$.[6]

1.1.8 Definitie. Zij $\mathbb{A}$ een (st-$\in$-definieerbare) klasse in $\mathbb{H}$. Voor een $\in$-formule ϕ definiëren we de formule $\phi^{\mathbb{A}}$ als de **relativisatie van ϕ tot** $\mathbb{A}$. We bekomen $\phi^{\mathbb{A}}$ door alle kwantoren $\exists x$ en $\forall x$ te vervangen door $\exists^{\mathbb{A}} x$ en $\forall^{\mathbb{A}} x$. Indien we $\phi^{\mathbb{A}}$ noteren, betekent dit dat ϕ een correcte eigenschap is, indien we ons beperken tot $\mathbb{A}$. ϕ mag ook parameters bevatten, maar $\phi^{\mathbb{A}}$ heeft geen betekenis indien er parameters van buiten $\mathbb{A}$ tussenzitten. Indien $\mathbb{A} = \mathbb{S}$, noteren we $\phi^{\mathbb{A}}$ ook als ϕ^{st}. Indien $\mathbb{A} = \mathbb{I}$, noteren we $\phi^{\mathbb{A}}$ ook als ϕ^{int}.

1.1.1 Axioma's voor alle verzamelingen

In deze paragraaf geven we de axioma's die gelden voor *alle* verzamelingen in het HST universum $\mathbb{H}$. We merken op dat we ons niet beperken tot het geven van een minimum aantal axioma's, met andere woorden: sommige axioma's kunnen overbodig zijn. Bijvoorbeeld kan men het Vervangingsaxioma afleiden uit het Collectie-axioma. We geven ze allemaal voor een klaardere kijk op de basisaxioma's.

- *Extensionaliteit (Extentionality)*: $\forall X \forall Y (\forall z(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \leftrightarrow X = Y)$.

Twee verzamelingen zijn gelijk als en slechts als ze dezelfde elementen bevatten.

- *Paar (Pair)*: $\forall X \forall Y \exists Z \forall w(w \in Z \leftrightarrow (w = X \vee w = Y))$.

Voor elke twee verzamelingen X en Y is $\{X, Y\}$ een verzameling.[7]

- *Unie (Union)*: $\forall X \exists Y \forall w(w \in Y \leftrightarrow \exists z(z \in X \wedge w \in z))$.

Voor elke verzameling X bestaat er een verzameling Y die alle elementen van de elementen van X bevat en geen enkel ander element. Deze verzameling wordt genoteerd als $\bigcup X$.

1.1.9 Notatie. $X \cup Y$ is een notatie voor $\bigcup Z$ met $Z = \{X, Y\}$.

Men kan ook de verzameling $\bigcap X$ definiëren.

1.1.10 Definitie. $\bigcap X$ is de verzameling $\{z \in \bigcup X \mid \forall x(x \in X \rightarrow z \in x)\}$. $\bigcap X$ is een verzameling in $\mathbb{H}$ omwille van het volgende axiomaschema. Analoog aan $X \cup Y$ kan men $X \cap Y$ definiëren.

[6] Deze notatie voor een algemene klasse $\mathbb{A}$ zal geen problemen opleveren bij de invoering van de axioma's van HST, zelfs indien de formule die $\mathbb{A}$ definieert parameters in $\mathbb{H}$ bevat. Dit komt omdat we deze algemene notatie simpelweg niet nodig hebben: we gebruiken in de axioma's enkel $\mathbb{A}$ gelijk aan $\mathbb{S}$ of $\mathbb{I}$ en voor deze klassen is alles wel goed gedefinieerd.

[7] Uitweiding: indien we werken in $\mathbb{H}$ betekent deze formule dat voor alle X en Y in $\mathbb{H}$ er een verzameling U in $\mathbb{H}$ bestaat zodat voor alle w in $\mathbb{H}$, w een element is van U als en slechts als w gelijk is aan X of w gelijk is aan Y. Omdat U een element is van $\mathbb{H}$ kunnen we een 'naam' geven aan die '$\exists Z$', namelijk U.

- *Separatie (Separation)*: $\forall X \exists Y \forall w (w \in Y \leftrightarrow (w \in X \wedge \phi(w)))$, met ϕ een st-$\in$-formule die de variabele Y niet bevat. De formule ϕ mag parameters bevatten.[8]

Dit betekent dat voor elke verzameling X en eigenschap ϕ, $\{w \in X \mid \phi(w)\}$ een verzameling is. Door het axioma Separatie toe te laten voor alle formules ϕ in de st-$\in$-taal, kunnen we spreken van de verzameling van alle standaard elementen van een gegeven verzameling X.[9]

- *Collectie (Collection)*: $\forall X \exists Y \forall x (x \in X \rightarrow (\exists y \phi(x,y) \rightarrow \exists y (y \in Y \wedge \phi(x,y))))$, met ϕ een st-$\in$-formule. De formule ϕ mag parameters bevatten.[10]

Met een klassefunctie bedoelen we een st-$\in$-formule $\phi(x,y)$ zodat voor alle x er hoogstens één y bestaat zodat $\phi(x,y)$ geldt. Concreet geldt de volgende formule: $\forall x \exists y \forall z (\phi(x,z) \rightarrow y = z)$. Men zegt dat x afgebeeld wordt op y onder ϕ. (Soms noteren we dit ook als $\phi(x) = y$.) Een verzamelingsfunctie f is een verzameling bestaande uit koppels (x,y) zodanig dat het volgende geldt: $\forall a \forall b \forall c[((a,b) \in f \wedge (a,c) \in f) \rightarrow b = c]$. Voor een verzamelingsfunctie wordt zowel de notatie $(x,y) \in f$ als $f(x) = y$ gebruikt. Een verzamelingsfunctie in $\mathbb{H}$ kunnen we altijd beschouwen als een klassefunctie door de formule $\phi(x,y) \equiv (x,y) \in f$ (ϕ bevat dan de parameter f). Vanaf nu spreken we alleen van het begrip 'functie'. De context zal duidelijk maken wat bedoeld wordt.
Een meerwaardige klassefunctie ϕ is een 'functie' die niet noodzakelijk één element heeft als beeld. In feite is de benaming 'meerwaardige *functie*' hier niet echt op zijn plaats. Een meerwaardige klassefunctie is niets anders dan een st-$\in$-formule ϕ.

Het Collectie-axioma zegt dat we voor elke meerwaardige functie ϕ een deel van zijn beelden in elk punt x van het 'domein' kunnen opvangen in een verzameling Y. Indien we het Collectie-axioma gebruiken in bewijzen, laten we het eerste argument[11] van ϕ corresponderen met de elementen van X en het tweede argument van ϕ met de elementen van Y. De parameters van ϕ corresponderen dan met het derde,vierde... argument van de formule.

- *Vervanging (Replacement)*: $\forall a \exists b \forall c (\phi(a,c) \leftrightarrow c = b) \rightarrow \forall X \exists Y \forall x (x \in X \rightarrow \exists y (y \in Y \wedge \phi(x,y)))$, met ϕ een st-$\in$-formule. De formule ϕ mag parameters bevatten.

Dit betekent dat voor elke afbeelding ϕ we zijn beeld kunnen opvangen in een verzameling Y, m.a.w. ϕ beeldt een verzameling af op een verzameling. Dit axioma kan men echter afleiden uit het Collectie-axioma. We kunnen het volgende bewijzen.

[8] 'ϕ mag parameters bevatten' betekent eigenlijk dat ϕ vrije variabelen mag bevatten (verschillend van Y). Concreet gezien betekent dit het volgende: zij ϕ een st-$\in$-formule met vrije variabelen $w, x_1, \ldots, x_n$. Dan is het Separatie-axioma gelijk aan $\forall x_1 \ldots \forall x_n [\forall X \exists Y \forall w (w \in Y \leftrightarrow (w \in X \wedge \phi(w, x_1, \ldots, x_n)))]$. Met '$\phi$ mag parameters bevatten' bedoelen we dus dat we de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ mogen vervangen door elementen van $\mathbb{H}$ indien we werken in dat HST-universum $\mathbb{H}$. 'Parameters (in $\mathbb{H}$)' zijn in feite willekeurige elementen van $\mathbb{H}$.

[9] In andere axiomatische theorieën zoals IST en BST is dit niet het geval: daar is $\{x \in X \mid \mathrm{st}(x)\}$ niet altijd een verzameling.

[10] Zelfde opmerkingen als bij het vorige axioma.

[11] Dit is de eerste vrije variabele x in de notatie van $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$

1.1.11 Stelling. *Zij X en Y twee willekeurige verzamelingen. Dan is $X \times Y$ een verzameling.*

Bewijs. Dit is hetzelfde bewijs als in ZFC. Voor de volledigheid geven we het bewijs hier. Voor elke twee verzamelingen x en y is het koppel (x, y) ook een verzameling in $\mathbb{H}$. Het koppel (x, y) is namelijk gelijk aan de verzameling $\{x, \{x, y\}\}$. (Dit is ontwikkeld door Kuratowski in 1912.) Door tweemaal het axioma Paar te gebruiken volgt dat (x, y) een verzameling is.
Kies een willekeurige $x \in X$ vast. Definieer

$$\Phi(y, z) \equiv z = (x, y).$$

Omdat (x, y) een verzameling is in $\mathbb{H}$, kunnen we gebruik maken van het Collectie-axioma. Hieruit volgt dat er een verzameling A_x bestaat, zodat voor alle $y \in Y$ geldt dat $(x, y) \in A_x$. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dan dat $B_x = \{(x, y) \mid y \in Y\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Ook is $\{B_x \mid x \in X\}$ een verzameling in $\mathbb{H}$: definieer

$$\begin{aligned}\Psi(x, z, Y) &\equiv z = B_x \\ &\equiv \forall v(v \in z \leftrightarrow \exists y(v = (x, y) \wedge y \in Y)).\end{aligned}$$

Omdat B_x een verzameling is, kunnen we gebruik maken van het Collectie-axioma. Hieruit volgt dat er een verzameling A bestaat, zodat voor alle $x \in X$ geldt dat $B_x \in A$. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dat $B = \{B_x \mid x \in X\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Door het Unie-axioma is

$$\bigcup B = X \times Y$$

een verzameling in $\mathbb{H}$. $\square$

Uit het Collectie-axioma volgt ook dat elke éénwaardige klassefunctie $\phi(x, y)$, waarvoor we het domein beperken tot een verzameling A, een verzamelingsfunctie is. Uit het Collectie-axioma volgt namelijk dat we al haar beelden onder A in één verzameling B kunnen stoppen. Door het Separatie-axioma volgt dan dat $\{(a, b) \in A \times B \mid \phi(x, y)\}$ een verzameling is. (Merk op dat de X in het axioma Collectie niet noodzakelijk het domein van de volledige 'functie' ϕ voorstelt.)

- *Oneindig (Infinity)*: $\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall y(y \in X \to (y \cup \{y\}) \in X))$.

Er bestaat een oneindige verzameling. $\emptyset$ is een notatie voor de unieke ledige verzameling: uit het axioma Separatie, met een formule die nooit geldig is, krijgen we een verzameling zonder elementen. Uit het axioma Extensionaliteit volgt dat deze verzameling uniek is.

1.1.2 Axioma's voor interne en standaard verzamelingen

In de axioma's die gelden voor *alle* verzamelingen zitten bijna alle axioma's van ZFC vervat (Zie Bijlage B). De enige axioma's die we niet hebben zijn 'Machtsverzameling', 'Keuze-axioma' en 'Regulariteit'. We zullen vaststellen dat volgens de paradox van Hrbaček 'Vervanging', 'Keuze-axioma'[12], 'Machtsverzameling' en 'Ongelimiteerde Saturatie' niet compatibel zijn in de st-$\in$-taal. Daarom moeten we verscheidene van deze axioma's afzwakken. In dit en het volgende onderdeel worden dan ook verzwakte versies van deze axioma's gepostuleerd.

De eerste groep axioma's geldt voor alle standaard verzamelingen. Er is een overlapping met de axioma's van de vorige groep, maar voor de duidelijkheid worden ze toch allemaal gegeven.

- *ZFCst*: de verzameling van de formules ϕ^{st} met ϕ een axioma/formule van ZFC in de $\in$-taal.

Deze groep axioma's betekent dat $\mathbb{S}$ een ZFC-universum is.

- *Overdracht (Transfer)*: $\phi^{\mathrm{st}} \leftrightarrow \phi^{\mathrm{int}}$, met ϕ een willekeurige $\in$-formule met enkel standaard verzamelingen als parameters.[13]

Een gevolg van dit axioma is dat $\mathbb{I}$ een ZFC-universum is. Overdracht postuleert dat men $\mathbb{I}$ kan beschouwen als een ($\in$-)elementaire uitbreiding van $\mathbb{S}$ in de $\in$-taal. Voor meer informatie over talen, structuren en elementaire uitbreidingen verwijzen we naar Bijlage A. Dit axioma lijkt op het Overdrachtsprincipe van de modeltheoretische benadering (zie Bijlage C). Een verschil is dat ϕ daar enkel begrensde kwantoren en parameters in $\widehat{\mathbb{R}}$ mag hebben.

- *Transitiviteit van $\mathbb{I}$ (Transitivity of $\mathbb{I}$)*: $\forall^{\mathrm{int}} x \forall y (y \in x \rightarrow \mathrm{int}\, y)$.

Alle elementen van een interne verzameling zijn intern. Dit axioma zorgt voor de structuur van $\mathbb{I}$. Dit axioma geldt ook in een modeltheoretisch niet-standaard model.

- *Regulariteit over $\mathbb{I}$ (Regularity over $\mathbb{I}$)*: $\forall X (\neg(X = \emptyset) \rightarrow \exists x (x \in X \wedge x \cap X \subseteq \mathbb{I}))$.

Interne verzamelingen zijn de basis van het HST-universum $\mathbb{H}$. In ZFC is het Regulariteitsaxioma hetzelfde, behalve dat $x \cap X = \emptyset$ hier vervangen is door $x \cap X \subseteq \mathbb{I}$ (zie Bijlage B). In Stelling 1.3.19 wordt bewezen dat het ZFC-Regulariteitsaxioma niet geldig is in haar volle glorie in HST. Het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$ organiseert het HST-universum $\mathbb{H}$ in een soort hiërarchie over $\mathbb{I}$ zoals het ZFC-universum georganiseerd is over $\emptyset$. In ZFC zorgt het Regulariteitsaxioma ervoor dat men een mooi beeld krijgt van elk ZFC-universum

[12] Meer concreet: de Goede-Ordeningsstelling.

[13] Net zoals vroeger betekent dit formeel gezien $\forall^{st} x_1 \ldots \forall^{\mathrm{st}} x_n [\phi^{\mathrm{st}}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{\mathrm{int}}(x_1, \ldots, x_n)]$ voor elke $\in$-formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

$\mathbb{V}$, namelijk de Von Neumann hiërarchie: $\mathbb{V} = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi$ met Ord de verzameling van de ordinalen in ZFC (zie Bijlage D). Daarbij is (in ZFC)

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_0 &= \emptyset, \\
\mathbb{V}_{\xi+1} &= \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi), \\
\mathbb{V}_\lambda &= \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi \text{ met } \lambda \text{ een limietordinaal.}
\end{aligned}$$

De verzamelingen $\mathbb{V}_\xi$ worden gedefinieerd door middel van transfiniete inductie op ξ. Doordat we in HST het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$ beschouwen, zou men kunnen denken dat $\mathbb{H} = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi$, indien we $\mathbb{V}_0 = \mathbb{I}$ nemen. $\mathbb{I}$ is echter geen verzameling in HST (zoals later zal blijken) en bovendien bevat HST het Machtsverzamelingsaxioma niet, zodat we deze constructie anders moeten funderen. We verwijzen naar Paragraaf 1.3.3 voor een verdere uiteenzetting. Er is echter een groot verschil met de ZFC-benadering: het grondniveau $\mathbb{I}$ kan al informatie bevatten over de ordinalen die de cumulatieve constructie van $\mathbb{H}$ over $\mathbb{I}$ definiëren.

Uit het Regulariteitsaxioma van ZFC kan men afleiden dat er geen verzamelingen X (in ZFC) bestaan zodat $X \in X$ (zie Bijlage B). Aangezien dit Regulariteitsaxioma geen axioma is in HST, kan men zich afvragen of dit ook geldt in HST.

1.1.12 Stelling. *Er bestaat geen verzameling X in $\mathbb{H}$ zodat $X \in X$.*

Bewijs. Zij X een verzameling in $\mathbb{H}$ zodat $X \in X$. Dan volgt uit het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$ toegepast op de verzameling $\{X\}$ dat $X \cap \{X\} \subseteq \mathbb{I}$. Omdat $X \in X$ volgt hieruit dat $X \in \mathbb{I}$. X is dus een verzameling in $\mathbb{I}$ waarvoor geldt dat $X \in X$. Dit is echter onmogelijk in het ZFC-universum $\mathbb{I}$. $\square$

Het laatste axioma van deze groep is:

- *Standardisatie (Standardization)*: $\forall X \exists^{\mathrm{st}} Y \forall^{\mathrm{st}} x (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$.

De verzameling Y wordt ook genoteerd als X^S of ${}^S X$ en $Y \cap \mathbb{S}$ is gelijk aan $X \cap \mathbb{S}$. Het axioma zorgt ervoor dat we in een redenering met niet-standaard verzamelingen kunnen overstappen naar standaard verzamelingen. Ook dit axioma is geldig in een modeltheoretisch niet-standaard model.

1.1.13 Stelling. *De verzameling Y in het axioma Standardisatie is uniek.*

Bewijs. Stel dat er twee standaard verzamelingen Y_1 en Y_2 bestaan zodat $Y_1 \cap \mathbb{S} = Y_2 \cap \mathbb{S}$. Omdat $\mathrm{ZFC}^{\mathrm{st}}$ een deel is van HST en ZFC het Extensionaliteitsaxioma bevat, geldt dat $Y_1 = Y_2$. $\square$

Natuurlijke getallen

Aangezien we de notie van een natuurlijk getal en inductie over $\mathbb{N}$ wensen te gebruiken, weiden we hier over uit. Het idee van Von Neumann over de natuurlijke getallen is dat $n = \{0, \ldots, n-1\}$. Er geldt $0 = \emptyset$, $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, enzovoort.

1.1.14 Definitie. De **opvolger** van een verzameling x is de verzameling $S(x) = x \cup \{x\}$. Dit wordt ook genoteerd als $x + 1$.

We noteren $\emptyset$ nu als 0.

1.1.15 Definitie. Een verzameling I is **inductief** als

1. $0 \in I$.
2. Als $n \in I$, dan $(n+1) \in I$.

Uit het Oneindigheidsaxioma volgt dat er minstens één inductieve verzameling bestaat. De volgende definitie is dus zinvol.

1.1.16 Definitie. De **verzameling van de natuurlijke getallen** is de verzameling

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \in I \text{ voor elke inductieve verzameling } I\}.$$

De elementen van $\mathbb{N}$ worden de **natuurlijke getallen** genoemd.

Uit het Oneindigheidsaxioma volgt dat er minstens één inductieve verzameling X in $\mathbb{H}$ bestaat, zodanig dat $\mathbb{N} = \{x \in X \mid x \in I \text{ voor elke inductieve verzameling } I\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$ door gebruik te maken van het Separatie-axioma.
De natuurlijke getallen zijn de elementen van de kleinste verzameling die $\emptyset$ bevat en die gesloten is onder S. Uit de definitie volgt dat $\mathbb{N}$ in feite zelf een inductieve verzameling is. We merken op dat in ZFC de definitie van de natuurlijke getallen net hetzelfde is. Een belangrijk principe is inductie over $\mathbb{N}$.

1.1.17 Stelling. *Stel $\phi(x)$ is een eigenschap (ϕ mag parameters van $\mathbb{H}$ bevatten). Stel dat*

1. *$\phi(0)$ geldt,*
2. *voor alle $n \in \mathbb{N}$, volgt $\phi(n+1)$ uit $\phi(n)$.*

Dan geldt ϕ voor alle natuurlijke getallen $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Bekijk de verzameling $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$. Uit het gegeven volgt dat A een inductieve verzameling is, zodat $\mathbb{N} \subseteq A$. We besluiten dat $A = \mathbb{N}$. $\square$

1.1.18 Definitie. Definieer de relatie $<$ op de verzameling $\mathbb{N}$ als: $m < n$ als en slechts als $m \in n$.

Hieruit volgt dat men een natuurlijk getal n kan opvatten als de verzameling $\{m \mid m < n\}$. Merk op dat voor een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt dat al haar elementen ook natuurlijke getallen zijn[14], zodat $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \in n\}$. Bovendien kan men aantonen dat er voor elke $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ een $m \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $S(m) = m + 1 = n$.[15] Dit element m wordt dan genoteerd als $n - 1$. Algemeen kan men aantonen dat de eigenschappen van de natuurlijke getallen in HST net dezelfde zijn als de eigenschappen van de natuurlijke getallen in ZFC. (Zie Stelling 1.3.11: daar tonen we aan dat de ordinalen over HST dezelfde eigenschappen hebben als ordinalen over ZFC. Omdat we ook zullen zien dat $\mathbb{N}$ een ordinaal is, heeft $\mathbb{N}$ in HST dezelfde eigenschappen als $\mathbb{N}$ in ZFC.)

Omdat we de notie van een natuurlijk getal hebben, kunnen we nu volgende stelling postuleren. Deze zegt wat intuïtief het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$ betekent:

1.1.19 Stelling. *Zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een oneindige $\in$-dalende rij. Dit betekent dat $x_{n+1} \in x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan bestaat er een eindig natuurlijk getal m zodat $x_n \in \mathbb{I}$ voor alle $n \geq m$.*

Bewijs. Definieer
$$X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
(X is een verzameling door de axioma's Vervanging en Separatie, aangezien een rij gezien wordt als een functie met domein $\mathbb{N}$.) Uit het axioma Regulariteit over $\mathbb{I}$ volgt dat er een verzameling $x \in X$ bestaat zodat $x \cap X \subseteq \mathbb{I}$. x is dus gelijk aan een zekere x_n, zodat $x_{n+1} \in x \cap X$. We besluiten dat $x_{n+1} \in \mathbb{I}$. Uit de transitiviteit van $\mathbb{I}$ volgt dat $x_k \in \mathbb{I}$ voor alle $k \geq n + 1$. □

1.1.3 Axioma's voor verzamelingen van standaard grootte

1.1.20 Definitie. Een verzameling wordt een verzameling van **standaard grootte** genoemd als het van de vorm $\{f(x) \mid x \in X \cap \mathbb{S}\}$ is met X een verzameling en f een functie met $X \cap \mathbb{S} \subseteq \mathrm{dom} f$.

Door het axioma Standardisatie kunnen we zelfs aannemen dat X een standaard verzameling is. Later tonen we aan dat beweren dat een verzameling van standaard grootte is, hetzelfde is als beweren dat er een goede ordening op die verzameling bestaat, wat ook hetzelfde is als beweren dat er een bijectie bestaat van die verzameling naar een kardinaalgetal.

1.1.21 Definitie. Een verzameling X wordt $\cap$-gesloten genoemd als voor elke $x, y \in X$ geldt dat $x \cap y \in X$.

Indien alle verzamelingen standaard zijn, dan zou $\mathbb{S} = \mathbb{I} = \mathbb{H}$. De volgende axioma's zorgen ervoor $\mathbb{S} \subsetneq \mathbb{I} \subsetneq \mathbb{H}$, met andere woorden dat er niet-standaard verzamelingen bestaan. We schrijven de volgende axioma's niet formeel op zodat ze beter te begrijpen zijn. Men kan ze echter op eenvoudige wijze formeel uitschrijven.

[14] Bekijk de eigenschap $\phi(n) \equiv \forall m(m \in n \rightarrow m \in \mathbb{N})$ en pas inductie over $\mathbb{N}$ toe.
[15] Bekijk de eigenschap $\phi(n) \equiv n = 0 \vee \exists k(S(k) = n)$ en pas inductie over $\mathbb{N}$ toe.

- *Saturatie (Saturation)*: Voor elke standaard grote verzameling $X \subseteq \mathbb{I}$ bestaande uit niet-ledige interne verzamelingen en die $\cap$-gesloten is geldt dat $\bigcap X \neq \emptyset$.

Dit betekent dat de klasse $\mathbb{I}$ 'standaard groot' gesatureerd is. In Stelling 1.3.47 zullen we bewijzen dat er ook een andere versie van Saturatie geldt in HST.

- *Standaard grootte Keuze-axioma (Standard Size Choice)*: Voor elke verzameling X van standaard grootte kunnen we uit al haar elementen één element kiezen en hen samen in een nieuwe verzameling Y steken.

Dit betekent dat voor elke surjectieve functie naar een verzameling van standaard grootte een keuze-functie bestaat:

1.1.22 Stelling. *Zij $f : X \to Y$ een surjectieve functie, X een verzameling en Y een verzameling van standaard grootte. Dan bestaat er een functie $s : Y \to X$ zodanig dat $f(s(y)) = y$, voor alle $y \in Y$. s wordt een* ***keuzefunctie*** *genoemd.*

Bewijs. We merken op dat f ook een klassefunctie mag zijn op twee verzamelingen. Definieer voor elke $y \in Y$ de verzameling

$$Z_y := \{(y, x) \mid f(x) = y\}.$$

Z_y is een verzameling door het axioma Separatie, aangezien $(y, x) \in Y \times X$. Door het axioma Collectie toe te passen op de verzameling Y en de formule

$$\begin{aligned} \Phi(y, z) &\equiv z = Z_y \\ &\equiv \forall u(u \in z \leftrightarrow \exists x(u = (y, x) \wedge f(x) = y)) \end{aligned}$$

verkrijgen we, omdat Z_y een verzameling is, een verzameling Z' zodat voor alle $y \in Y$ geldt dat $Z_y \in Z'$. Door het axioma Separatie verkrijgen we dan dat

$$Z := \{Z_y \mid y \in Y\}$$

een verzameling is in $\mathbb{H}$. Z is een verzameling van standaard grootte, aangezien ze evenveel elementen bevat als Y.[16] Uit het Standaard grootte Keuze-axioma volgt dat er een verzameling s bestaat zodanig dat s één element bevat van elke verzameling Z_y (en niets meer). s stelt dan een keuzefunctie voor. $\square$

Het is algemeen bekend in ZFC dat het Keuze-axioma (van ZFC) equivalent is met de Goede-Ordeningsstelling, die zegt dat er voor elke verzameling (in een ZFC-universum) een goede ordening op die verzameling bestaat.[17] In HST geldt iets gelijkaardigs: HST bevat het Standaard grootte Keuze-axioma en men kan bewijzen in HST dat de enige verzamelingen die goed-geordend kunnen worden, verzamelingen van standaard grootte

[16] In Gevolg 1.3.42 zullen we zien dat het beeld van een verzameling van standaard grootte onder een functie ook een verzameling is van standaard grootte.

[17] Zie later voor de definitie van een goede ordening op een verzameling.

zijn. We merken op dat we bij het bewijs in HST van 'elke verzameling van standaard grootte kan goed-geordend worden' geen gebruik maken van het Standaard grootte Keuze-axioma. In tegenstelling tot ZFC, kan men uit de stelling 'elke verzameling van standaard grootte kan goed-geordend worden' niet het Standaard grootte Keuze-axioma afleiden, zodat we geen overbodig axioma hebben ingevoerd. Zie later en vooral Stelling 1.3.41 voor meer details.

1.1.23 Definitie. Een relatie R op een verzameling X wordt **volledig** genoemd indien voor elke $a \in X$ er een $b \in X$ bestaat zodat aRb ('a in relatie staat met b').

- *Afhankelijke Keuze (Dependent Choice)*: Voor elke niet-ledige verzameling X en elke volledige relatie R op X bestaat er een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zodat $x_n R x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ en $x_n \in X$, voor alle $n \in \mathbb{N}$.[18]

Afhankelijke Keuze is een verzwakking van het Keuze-axioma. Dit axioma is voldoende om de meeste reële analyse te ontwikkelen. We kunnen op een aftelbare manier keuzes maken waarbij onze n^{de} keuze afhangt van onze $(n-1)^{\text{ste}}$ keuze. Dit axioma is geldig voor alle verzamelingen X. X hoeft dus niet noodzakelijk een verzameling van standaard grootte te zijn.

1.2 Verbanden tussen $\mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ en $\mathbb{WF}$

1.2.1 Definitie. Een **ZFC-interpretatie in HST** is een st-$\in$-definieerbare[19] $\in$-structuur $\mathbb{A}$, met andere woorden een klasse in $\mathbb{H}$ met de relatie $\in$, waarvoor het bewijsbaar is in HST dat $\mathbb{A}$ voldoet aan de axioma's van ZFC, met andere woorden HST $\vdash \phi^{\mathbb{A}}$ voor alle axioma's ϕ van ZFC.

Een ZFC-universum is een collectie van verzamelingen die aan de axioma's van ZFC voldoet. Een ZFC-interpretatie in HST is dus een ZFC-universum. Er zijn verscheidene ZFC-interpretaties beschikbaar in HST. Ten eerste is $\mathbb{S}$ een ZFC-interpretatie in HST, omdat HST de axioma's ZFC$^{\text{st}}$ bevat. Door het axioma Overdracht is ZFC$^{\text{int}}$ bewijsbaar in HST, zodat $\mathbb{I}$ ook een ZFC-interpretatie is in HST. $\mathbb{S}$ is een deelklasse van $\mathbb{I}$, wat wordt aangetoond in de volgende stelling.

1.2.2 Stelling. $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{I}$.

Bewijs. Omdat $\forall x \exists y (x \in y)$ een formule is in ZFC en HST de axioma's ZFC$^{\text{st}}$ bevat, geldt dat HST $\vdash \forall^{\text{st}} x \exists^{\text{st}} y (x \in y)$. We besluiten dat een willekeurige standaard verzameling x voldoet aan de formule $\exists^{\text{st}} y (x \in y)$, zodat x intern is. $\square$

[18] We hebben de definitie van $\mathbb{N}$ gegeven in Definitie 1.1.16. Merk op dat dit een definitie is onafhankelijk van $\mathbb{H}$: men kan eenvoudig een formule $\phi(x)$ vinden die uitdrukt of x gelijk is aan $\mathbb{N}$ of niet. Men moet bij het axioma Afhankelijke Keuze de volgende kwantor schrijven: $\forall x(\phi(x) \to \dots)$. Men maakt dan gebruik van x, in de verdere formulering van het axioma, voor het domein van die rij. In een HST-universum $\mathbb{H}$ bestaat er altijd juist één verzameling x die aan $\phi(x)$ voldoet.

[19] $\mathbb{A}$ moet st-$\in$-definieerbaar zijn, net zoals in de algemene Definitie A.0.11.

Elke interne verzameling is per definitie een element van een standaard verzameling: alle elementen van een standaard verzameling zijn interne verzamelingen. Nu bevat niet elke niet-ledige interne verzameling standaard elementen[20].
Er is echter nog een derde ZFC-universum aanwezig in $\mathbb{H}$: de klasse van de goed-gefundeerde verzamelingen.

1.2.3 Definitie. Een binaire relatie $\prec$ op een verzameling of klasse X[21] wordt **goed-gefundeerd** genoemd als elke niet-ledige verzameling $Y \subseteq X$ een $\prec$-minimaal element bevat en als voor elke $x \in X$, $\{y \in X \mid y \prec x\}$ een verzameling is (in $\mathbb{H}$). We noteren $\{y \in X \mid y \prec x\}$ als $ext_{\prec}(x)$.[22]

Indien X een verzameling is, dan is $\{y \in X \mid y \prec x\}$ trivialerwijs een verzameling door het axioma Separatie. Indien $\prec$ de relatie $\in$ is, dan is $\{y \in X \mid y \prec x\}$ gelijk aan $\{y \in x \mid y \in X\}$. Dit is een verzameling omwille van het Separatie-axioma en omdat X een (st-$\in$-definieerbare) klasse of verzameling is. Intuïtief betekent goed-gefundeerd zijn het volgende:

1.2.4 Stelling. *Zij $\prec$ een relatie waarvoor $\{y \in X \mid y \prec x\}$ een verzameling is voor elke $x \in X$. Dan is $\prec$ een goed-gefundeerde relatie op X als en slechts als er geen $\prec$-dalende rijen in X bestaan.*

Bewijs. '$\Longrightarrow$': stel dat zo'n rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wel bestaat. Dan is $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een deelverzameling van X zonder een $\prec$-minimaal element, een tegenstrijdigheid. ($\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is een verzameling door het axioma Vervanging.)
'$\Longleftarrow$': stel dat Y een niet-ledige deelverzameling is van X zonder $\prec$-minimaal element. Hieruit volgt dat de relatie $\succ$ op Y volledig is. Door het axioma Afhankelijke Keuze toe te passen op de volledige relatie $\succ$, volgt dat er een oneindige $\prec$-dalende rij bestaat in X, een tegenstrijdigheid. $\square$

Voor een goed-gefundeerde relatie $\prec$ op X heeft elke niet-ledige deelverzameling van X een $\prec$-minimaal element. Een vraag die men zich kan stellen is of dit ook geldt voor alle deelklassen van X.

1.2.5 Stelling. *Zij $\prec$ een goed-gefundeerde relatie op X (X een verzameling of klasse). Elke niet-ledige klasse $C \subseteq X$ heeft een $\prec$-minimaal element.*[23]

Bewijs. Kies een willekeurig element $c \in C$. Definieer

$$\begin{aligned} S_0 &= \{x \in X \mid x \prec c\} = ext_{\prec}(c), \\ S_{n+1} &= \bigcup \{\{x \in X \mid x \prec z\} \mid z \in S_n\} = \bigcup \{ext_{\prec}(z) \mid z \in S_n\}\,. \end{aligned}$$

[20]De verzamelingen $\{\omega\}$ en $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \geq \omega\}$ met $\omega \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ (zie later voor de concrete definities) zijn intern, maar bevatten geen standaard elementen.

[21]$\prec$ kan zelf ook een klasse of verzameling zijn.

[22]$ext_{\prec}(x)$ staat voor 'de extensie van x'.

[23]Het bewijs is gebaseerd op Lemma 6.9 in [6].

Indien $S_0 \cap C = \emptyset$, dan is c een $\prec$-minimaal element van C. Stel vanaf nu dat $S_0 \cap C \neq \emptyset$. We bewijzen door middel van inductie op n dat S_n een verzameling is voor alle n. S_0 is een verzameling door het gegeven. Stel dat S_n een verzameling is. Definieer

$$\begin{aligned} \Phi(y,z) &\equiv (z = \{x \in X \mid x \prec y\}) \\ &\equiv \forall u(u \in z \leftrightarrow (u \in X \wedge u \prec y)). \end{aligned}$$

Omdat $ext_{\prec}(y)$ een verzameling is in $\mathbb{H}$ voor alle $y \in S_n \subseteq X$, kunnen we het Collectie-axioma toepassen op de formule Φ en de verzameling S_n. Hieruit volgt dat er een verzameling Z bestaat, zodat voor alle $y \in S_n$ een $z \in Z$ bestaat waarvoor $\Phi(y,z)$ geldt. Stel nu

$$Y := \{z \in Z \mid \exists y(y \in S_n \wedge \Phi(y,z))\},$$

wat een verzameling is door het Separatie-axioma. Dan is $S_{n+1} = \bigcup Y$ een verzameling in $\mathbb{H}$ door het Unie-axioma.

Definieer nu

$$\begin{aligned} \Psi(n,y) &\equiv (y = S_n) \\ &\equiv \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in S_n), \end{aligned}$$

waarbij, rekening houdend met het feit dat het natuurlijk getal n gelijk is aan de verzameling van alle natuurlijke getallen strikt kleiner dan n,

$$\begin{aligned} z \in S_n \equiv\ & \exists f(\text{‘}f \textbf{ is functie met domein } (n+2)\text{’} \\ \wedge\ & f(0) = z \\ \wedge\ & \forall x(x \in (n+1) \rightarrow f(x) \prec f(x+1)) \\ \wedge\ & f(n+1) = c). \end{aligned}$$

Omdat S_n een verzameling is in $\mathbb{H}$, kunnen we het Collectie-axioma toepassen op de formule Ψ en de verzameling $\mathbb{N}$. Hieruit volgt dat er een verzameling bestaat die alle verzamelingen S_n bevat als element. Uit het Separatie-axioma volgt dan dat $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Definieer nu de verzameling

$$T = \bigcup\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Door gebruik te maken van het Separatie-axioma volgt hieruit dat $V := T \cap C$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. $V \neq \emptyset$, aangezien $\emptyset \subsetneq S_0 \cap C \subseteq V$.
Omdat $\prec$ een goed-gefundeerde relatie is op X, bestaat er een $\prec$-minimaal element $v \in V$ van V. We wensen aan te tonen dat v ook een $\prec$-minimaal element is van C. Stel dat dit niet zo is en dat er een $z \in C$ bestaat zodat $z \prec v$. Omdat $v \in V \subseteq T$, bestaat er een natuurlijk getal n zodat $v \in S_n$. Uit de constructie van S_{n+1} volgt dat $z \in S_{n+1}$, zodat $z \in C \cap T = V$. v kan dus geen $\prec$-minimaal element van V zijn, een tegenstrijdigheid. $\square$

De verzameling T in het vorige bewijs kan men construeren voor elke $c \in X$. We noteren deze verzameling vanaf nu als $T(c)$. We geven twee hulpstellingen die we later nog zullen gebruiken. De eerste is een veralgemening van de bekende transfiniete inductie. De tweede hulpstelling is een veralgemening op transfiniete recursie[24].

1.2.6 Hulpstelling (Goed-gefundeerde Inductie)**.** *Zij $\prec$ een goed-gefundeerde relatie op X (X een verzameling of klasse). Zij $\Phi(x)$ een eigenschap. Neem aan dat*

1. *voor elk $\prec$-minimaal element x geldt eigenschap $\Phi(x)$,*

2. *als $x \in X$ en $\Phi(z)$ geldt voor alle $z \prec x$, dan geldt $\Phi(x)$.*

Dan geldt voor iedere $x \in X$ eigenschap $\Phi(x)$.

Bewijs. Definieer de klasse

$$Y \quad := \quad \{x \in X \mid \neg\Phi(x)\}.$$

Indien Y niet-ledig is, dan volgt uit Stelling 1.2.5 dat er een $\prec$-minimaal element y bestaat van Y. Ofwel is y een $\prec$-minimaal element van X ofwel bestaan er elementen z van X zodat $z \prec y$. In het eerste geval volgt uit (1.) dat $y \notin Y$, een tegenstrijdigheid. In het tweede geval volgt uit (2.) en de $\prec$-minimaliteit van y in Y dat $y \notin Y$, een tegenstrijdigheid. We besluiten dat Y de ledige klasse moet zijn. $\square$

1.2.7 Definitie. Zij $\prec$ een binaire relatie op X. Een verzameling of klasse Y wordt **$\prec$-transitief** genoemd als voor elke $y \in Y$ geldt dat als $z \prec y$, dat dan $z \in Y$. Een verzameling of klasse Y wordt **transitief** genoemd indien het $\in$-transitief is.

Trivialerwijs is de volledige klasse X $\prec$-transitief, aangezien $\prec \subseteq X \times X$. Een transitieve verzameling X is een verzameling waarvoor geldt dat de elementen van de elementen van X ook elementen zijn van X.

1.2.8 Hulpstelling (Goed-gefundeerde Recursie)**.** *Zij $\prec$ een goed-gefundeerde relatie op X (X een verzameling of klasse) en G een (klasse)functie met domein $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Dan bestaat er een unieke functie F op X zodat*

$$F(x) = G(x, F/(\{y \in X \mid y \prec x\})) = G(x, F/ext_{\prec}(x)), \tag{1.1}$$

voor alle $x \in X$.

Bewijs. Dat G een klassefunctie is op $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ betekent dat er een formule $\phi(x, y, z)$ bestaat die uitdrukt dat $G(x, y) = z$. De unieke functie F kan zelf ook een klassefunctie zijn.

Allereerst tonen we aan dat een willekeurige functie F, met $\prec$-transitief domein T en die voldoet aan vergelijking (1.1) voor al de elementen uit haar domein, uniek is. Zij F' een andere functie verschillend van F met domein T en die voldoet aan vergelijking (1.1). Omdat

[24] Het bewijs heeft een persoonlijke inbreng.

$\prec$ goed-gefundeerd is, volgt uit Stelling 1.2.5 dat er een $\prec$-minimaal element m van T bestaat zodat $F(m) \neq F'(m)$. Hieruit volgt dat $F/\{y \in T \mid y \prec m\}$ en $F'/\{y \in T \mid y \prec m\}$ dezelfde functies zijn, zodat uit vergelijking (1.1) volgt dat $F(m) = F'(m)$, een tegenstrijdigheid. (Merk op dat $F/\{y \in T \mid y \prec m\}$ en $F'/\{y \in T \mid y \prec m\}$ wel degelijk verzamelingen zijn, aangezien het een (eventuele klasse)functie is die we beperken tot een verzameling.[25]) Dat een functie F met volledig domein X en die aan vergelijking (1.1) voldoet uniek is, kan op analoge wijze afgeleid worden.
Zij nu F een functie met $\prec$-transitief domein T en die aan vergelijking (1.1) voldoet. Indien $T' \subseteq T$ een $\prec$-transitieve deelverzameling is van T, dan kan men makkelijk aantonen dat F/T' ook voldoet aan vergelijking (1.1).

We tonen nu het bestaan van de functie F aan. (De voorgaande bespreking levert ons het idee op.) Definieer voor alle $x \in X$ waarvoor het mogelijk is

$$\begin{aligned} (x, y) \in F \quad &\Leftrightarrow \quad F(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \exists f(\textbf{`f is functie'} \wedge f(x) = y \wedge \text{`}dom(f) = \boldsymbol{\prec}\textbf{-transitief'} \wedge x \in dom(f) \\ &\wedge \quad \forall z(z \in dom(f) \rightarrow f(z) = G(z, f/(\{u \in X \mid u \prec z\})))), \end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned} \textbf{`}f \textbf{ is functie'} \quad &\equiv \quad \forall u \forall v \forall w(((u, v) \in f \wedge (u, w) \in f) \rightarrow v = w) \\ &\wedge \quad \forall x(x \in f \rightarrow \exists u \exists v(x = (u, v))), \\ x \in dom(f) \quad &\equiv \quad \exists y((x, y) \in f), \\ \text{`}dom(f) = \boldsymbol{\prec}\textbf{-transitief'} \quad &\equiv \quad \forall x \forall y(y \in dom(f) \wedge x \prec y \rightarrow x \in dom(f)). \end{aligned}$$

Indien zo'n functie f bestaat, volgt uit onze vroegere bemerkingen dat f uniek is, zodat F een goed gedefinieerde functie is.
We moeten aantonen dat F aan vergelijking (1.1) voldoet en dat F domein X heeft. Definieer de klasse Y als volgt:

$$\begin{aligned} Y := \{ \ x \in X \quad \mid \quad &\neg[\exists f(\textbf{`f is functie'} \wedge \text{`}dom(f) = \boldsymbol{\prec}\textbf{-transitief'} \wedge x \in dom(f) \\ &\wedge \quad \forall z(z \in dom(f) \rightarrow f(z) = G(z, f/(\{u \in X \mid u \prec z\}))))]\}. \end{aligned}$$

We wensen aan te tonen dat Y ledig is, want dan heeft de functie F domein X. Stel dat Y niet-ledig is. Uit Stelling 1.2.5 volgt dat er een $\prec$-minimaal element y van Y bestaat. Zij $T(y)$ de constructie van T in het bewijs van diezelfde stelling, indien we vertrokken vanaf y (in dat bewijs vertrokken we vanaf c). Dan is $T = T(y) \cup \{y\}$ een $\prec$-transitieve verzameling die y bevat als element.
Wegens de minimaliteit van y, bestaat er voor elk element $z \in T(y)$ een functie f_z met $\prec$-transitief domein dat z bevat als element en die aan vergelijking (1.1) voldoet.[26] Merk

[25] Omdat $\{y \in T \mid y \prec m\} = \{y \in X \mid y \prec m \text{ en } y \in T\}$.

[26] Voor $z \in ext_{\prec}(y)$ geldt dit triviaal wegens de minimaliteit van y. Indien $z \in T(y)$, dan bestaan er elementen $y_1, \ldots, y_n$ zodat $z \prec y_n \prec \cdots \prec y_1 \prec y$. Functie f_z bestaat dus, namelijk $f_z = f_{y_1}$.

op dat de waarde van $f_z(z)$ uniek en onafhankelijk is van de functie f_z. Definieer voor alle $z \in T(y)$

$$f(z) := f_z(z)$$

en

$$f(y) := G(y, A),$$

waarbij

$$A := \{(z, f_z(z)) \mid z \in ext_{\prec}(y)\}.$$

f is in feite gelijk aan $\{(z, f_z(z)) \mid z \in T(y)\} \cup \{(y, G(y, A))\}$ en is dus een goed gedefinieerde functie in HST indien $\{(z, f_z(z)) \mid z \in ext_{\prec}(y)\}$ en $\{(z, f_z(z)) \mid z \in T(y)\}$ verzamelingen zijn in $\mathbb{H}$. We tonen nu aan dat $\{(z, f_z(z)) \mid z \in T(y)\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Door het axioma Separatie toe te passen op deze verzameling, verkrijgen we dat A een verzameling is. Zij

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(z, u) & \equiv & (u = (z, f_z(z))) \\
& \equiv & \exists v(u = (z, v) \wedge \exists f(\text{‘}\mathbf{f\ is\ functie}\text{’} \wedge \text{‘}dom(f) = \prec\mathbf{\text{-}transitief}\text{’} \wedge z \in dom(f) \\
& \wedge & f(z) = v \wedge \forall z(z \in dom(f) \rightarrow f(z) = G(z, f/(\{y \in X \mid y \prec z\})))))
\end{array}$$

Omdat voor elke $z \in T(y)$ er een f_z bestaat, kunnen we gebruik maken van het Collectie-axioma op de formule Φ en de verzameling $T(y)$. Hieruit volgt dat er een verzameling Y' bestaat zodanig dat voor alle $z \in T(y)$ geldt dat $(z, f_z(z)) \in Y'$. Door het Separatie-axioma toe te passen op Y' verkrijgen we dat $\{(z, f_z(z)) \mid z \in T(y)\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$.

f is een functie met domein $T(y) \cup \{y\}$ die aan vergelijking (1.1) voldoet: voor $z \in T(y)$ is

$$\begin{array}{rcl}
f(z) & = & f_z(z) = G(z, f_z/ext_{\prec}(z)) \\
& = & G(z, \{(w, f_z(w)) \mid w \in ext_{\prec}(z)\}) \\
& \overset{\text{uniciteit } f_w(w)}{=} & G(z, \{(w, f_w(w)) \mid w \in ext_{\prec}(z)\}) \\
& = & G(z, \{(w, f(w)) \mid w \in ext_{\prec}(z)\}) \\
& = & G(z, f/ext_{\prec}(z))
\end{array}$$

en voor $z = y$ is

$$\begin{array}{rcl}
f(y) & = & G(y, \{(z, f_z(z)) \mid z \in ext_{\prec}(y)\}) \\
& = & G(y, \{(z, f(z)) \mid z \in ext_{\prec}(y)\}) \\
& = & G(y, f/ext_{\prec}(y)).
\end{array}$$

We besluiten dat y niet tot Y behoort, een tegenstrijdigheid. Y is de ledige klasse, waardoor F domein X heeft.

We moeten nog aantonen dat F aan vergelijking (1.1) voldoet. Kies een willekeurig element $x \in X$. Er bestaat een functie f met $\prec$-transitief domein die x bevat en die aan vergelijking (1.1) voldoet waarvoor $F(x) = f(x)$. Dan is

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) = G(x, f/ext_\prec(x)) \\ &= G(x, \{(y, f(y)) \mid y \in ext_\prec(x)\}) \\ &= G(x, \{(y, F(y)) \mid y \in ext_\prec(x)\}) \\ &= G(x, F/ext_\prec(x)), \end{aligned}$$

waarbij de derde gelijkheid geldt omdat voor elke $y \in ext_\prec(x)$, $f/(T(y) \cup \{y\})$ een functie is met $\prec$-transitief domein die y bevat en die aan vergelijking (1.1) voldoet. Daardoor is $f(y) = F(y)$. □

1.2.9 Definitie. Een verzameling of klasse X wordt **$\subseteq$-compleet** genoemd als voor elke $y \subseteq x \in X$ geldt dat $y \in X$.

Een $\subseteq$-complete verzameling X is een verzameling waarvoor geldt dat de deelverzamelingen van de elementen van X ook elementen zijn van X.

1.2.10 Definitie. Een verzameling X wordt **goed-gefundeerd** genoemd als er een transitieve verzameling Y bestaat zodat $X \subseteq Y$ en de binaire relatie $\in /Y$ op Y goed-gefundeerd is. (De relatie $\in /Y$ is gelijk aan $\in \cap (Y \times Y)$. Merk op dat in dit geval de voorwaarde '$\{y \in Y \mid y \ \in /Y \ x\}$ is een verzameling voor $x \in Y$' altijd vervuld is, aangezien deze verzameling gelijk is aan x zelf omdat Y transitief is. $\in /Y$ is goed-gefundeerd op Y is hetzelfde zeggen als $\in /Y$ is goed-gefundeerd (op $\mathbb{H}$), aangezien beiden formules hetzelfde uitdrukken. Merk op dat $\{y \in Y \mid y \ \in /Y \ x\}$ de ledige verzameling is voor $x \notin Y$.[27]) Indien X goed-gefundeerd is dan noteren we dat als $\mathrm{wf}(X)$. De klasse van alle goed-gefundeerde verzamelingen noteren we als $\mathbb{WF}$. Dat dit effectief een *klasse* is in $\mathbb{H}$ wordt in de volgende hulpstelling aangetoond.

1.2.11 Hulpstelling. *$\mathbb{WF}$ is een $\in$-definieerbare klasse in $\mathbb{H}$.*

Bewijs.

$$\text{'}x \in \mathbb{WF}\text{'} \;\Leftrightarrow\; \exists y(\forall z(z \in x \to z \in y) \wedge \text{'}y \textbf{ transitief'} \wedge \text{'}{\in}/y \textbf{ goed-gefundeerd op } y\text{'}).$$

Hierbij is

$$\text{'}y \textbf{ transitief'} \;\Leftrightarrow\; \forall z(z \in y \to \forall w(w \in z \to w \in y))$$

en

$$\begin{aligned} \text{'}{\in}/y \textbf{ goed-gefundeerd op } y\text{'} \;\Leftrightarrow\; & \forall w(\forall z(z \in w \to z \in y) \wedge w \neq \emptyset \\ & \to \exists u(u \in w \wedge \forall v(v \in w \to v \notin u))). \end{aligned}$$

□

[27] '$\in /Y$ is goed-gefundeerd' kan uitgedrukt worden met de formule $\forall w(w \neq \emptyset \to \exists u[u \in w \wedge (u \notin Y \vee \forall v(v \in w \cap y \to v \notin u))])$, terwijl '$\in /Y$ is goed-gefundeerd op Y' kan uitgedrukt worden met de formule in Hulpstelling 1.2.11.

Het is algemeen bekend dat alle verzamelingen in ZFC goed-gefundeerd zijn[28]. In Hulpstelling 1.3.18 zullen we aantonen dat er een verzameling bestaat die geen $\in$-kleinste element heeft. Niet alle verzamelingen in $\mathbb{H}$ zijn dus goed-gefundeerd. Omdat $\mathbb{WF}$ een goed gedefinieerde *klasse* is, met andere woorden dat $\mathbb{WF}$ st-$\in$-definieerbaar is (zelfs $\in$-definieerbaar) in $\mathbb{H}$, zijn $\exists^{\mathbb{WF}}$, $\forall^{\mathbb{WF}}$ en $\phi^{\mathbb{WF}}$ zinvolle notaties.

1.2.12 Notatie. We noteren de formule $\exists^{\mathbb{WF}}x$ ook als $\exists^{\text{wf}}x$. Analoog voor $\forall^{\mathbb{WF}}$ en $\phi^{\mathbb{WF}}$.

Tot slot een equivalente karakterisering van goed-gefundeerde verzamelingen:

1.2.13 Stelling. *Een verzameling X is goed-gefundeerd als en slechts als er een transitieve verzameling Y bestaat zodat $X \in Y$ en de binaire relatie $\in/Y$ op Y goed-gefundeerd is.*

Bewijs. '$\Longleftarrow$': Stel er bestaat een transitieve verzameling Y zodat $X \in Y$ en de binaire relatie $\in/Y$ op Y goed-gefundeerd is. Omdat Y transitief is, is $X \subseteq Y$, zodat X goed-gefundeerd is.
'$\Longrightarrow$': Stel dat X goed-gefundeerd is, zodat er een transitieve verzameling Y bestaat zodat $X \subseteq Y$ en de binaire relatie $\in/Y$ op Y goed-gefundeerd is. Stel

$$Z := Y \cup \{X\}.$$

We tonen aan dat Z transitief en $\in/Z$ goed-gefundeerd is.
Indien $X \in Y$, dan is dit triviaal, want dan is $Z = Y$ wegens het Extensionaliteits-axioma.
Neem vanaf nu aan dat $X \notin Y$. Eerst tonen we aan dat Z transitief is. Kies een $z \in Z$. Dan is ofwel $z \in Y$ ofwel $z = X$. Omdat Y transitief is en $X \subseteq Y$ geldt in beide gevallen dat $z \subseteq Y$. We besluiten dat $z \subseteq Y \subseteq Z$.
Nu tonen we aan dat $\in/Z$ goed-gefundeerd is. Kies een $\emptyset \subsetneq z \subseteq Z$. Indien $z = \{X\}$, dan heeft z trivialerwijs een $\in/Z$-minimaal element, namelijk X zelf. Stel dus dat $z \setminus \{X\} \neq \emptyset$. Omdat $\in/Y$ goed-gefundeerd is, bestaat er een $\in/Y$-minimaal element a van $z \setminus \{X\}$. Het is voldoende aan te tonen dat a een $\in/Z$-minimaal element is van z. Zij dus $b \in a \cap Z$. We moeten aantonen dat $b \notin z$.
Omdat Y transitief is en $a \in Y$, geldt dat $b \in Y$. Indien $b = X$, dan zou $X \in Y$, een tegenstrijdigheid. Dus $b \neq X$, zodat $b \notin z$ (want anders zou a geen $\in/Y$-minimaal element zijn van $z \setminus \{X\}$). We besluiten dat z een $\in/Z$-minimaal element a heeft. □

Er bestaat zoiets als de transitieve sluiting van een verzameling x.

1.2.14 Definitie. De **transitieve sluiting** $Tc(x)$ van een verzameling x is de volgende verzameling:

$$\begin{aligned} Tc(x) &= x \cup \left(\bigcup x\right) \cup \left(\bigcup\bigcup x\right) \cup \ldots \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup^n x. \end{aligned}$$

De transitieve sluiting van x is de kleinste transitieve verzameling die x bevat als deelverzameling. $Tc(x)$ is een verzameling in HST door de axioma's Vervanging en Unie, maar hier wordt verder niet op ingegaan.

[28] Voor een bewijs, zie Bijlage B.

1.2.1 Een $\in$-isomorfisme tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{S}$

1.2.15 Definitie. Een **$\in$-isomorfisme** f van A op B (A en B mogen klassen zijn) is een bijectie die $\in$ behoudt. Er geldt dus $a_0 \in a_1 \Leftrightarrow f(a_0) \in f(a_1)$.

We hebben een analogon voor de modeltheoretische benadering in HST: er bestaat namelijk een $\in$-isomorfisme tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{S}$ dat we noteren met *.

1.2.16 Definitie. Voor iedere verzameling $w \in \mathbb{WF}$ definiëren we $^*w$ als $^S\{^*u \mid u \in w\}$.

We wensen aan te tonen dat deze definitie zinvol is. We zullen hiervoor Goed-gefundeerde Recursie gebruiken. Daarvoor hebben we nodig dat $\in/\mathbb{WF}$ goed-gefundeerd is, zodat er geen oneindig lange dalende $\in/\mathbb{WF}$-ketens bestaan. De volgende hulpstelling toont dit aan en zegt bovendien iets over de structuren $\mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ en $\mathbb{WF}$.[29]

1.2.17 Hulpstelling.

1. *De relatie $\in/\mathbb{S}$ is goed-gefundeerd.*[30]
2. (a) *De klasse $\mathbb{WF}$ is transitief.*
   (b) *Indien $X \subseteq \mathbb{WF}$, dan is $X \in \mathbb{WF}$ (X een verzameling).*
   (c) *$\mathbb{WF}$ is $\subseteq$-compleet.*
   (d) *De relatie $\in/\mathbb{WF}$ is goed-gefundeerd.*
3. *$\mathbb{I}$ is transitief*[31].

Bewijs. (1.) Kies een verzameling Y zodat

$$\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{S}.$$

We moeten aantonen dat Y een $\in/\mathbb{S}$-minimaal element bevat. Wegens het axioma Standardisatie bestaat er een standaard verzameling X zodat $X \cap \mathbb{S} = Y \cap \mathbb{S} = Y$. De formule 'elke niet-ledige verzameling heeft een $\in$-minimaal element' is een stelling van ZFC (zie Bijlage B) en aangezien HST de axioma's $\mathrm{ZFC}^{\mathrm{st}}$ bevat, geldt deze formule ook als we enkel naar standaard verzamelingen kijken. We besluiten dat $X \cap \mathbb{S}$ een $\in/\mathbb{S}$-minimaal element x bevat. Omdat $X \cap \mathbb{S} = Y$, is x ook een $\in/\mathbb{S}$-minimaal element van Y.

(2.a) Kies een willekeurige $X \in \mathbb{WF}$ en een willekeurig element $x \in X$. Door de definitie van een goed-gefundeerde verzameling bestaat er een transitieve verzameling Y zodat

[29] Het bewijs is gebaseerd op Stelling 1.1.9 uit [9], met aanpassingen van mezelf ter verbetering en met opgeloste oefeningen.

[30] Indien we willen aantonen dat een relatie $\in/\mathbb{A}$ goed-gefundeerd is, is het voldoende deelverzamelingen van $\mathbb{A}$ te beschouwen net zoals opgemerkt in Definitie 1.2.10. Met andere woorden $\in/\mathbb{A}$ is goed-gefundeerd is hetzelfde als zeggen dat $\in/\mathbb{A}$ goed-gefundeerd is op $\mathbb{A}$. Merk op dat $\{y \in \mathbb{S} \mid y \in/\mathbb{S}\ x\}$ een verzameling is, namelijk $\{y \in x \mid st(y)\}$ indien $x \in \mathbb{S}$, of $\emptyset$ indien $x \notin \mathbb{S}$.

[31] $\in/\mathbb{I}$ is niet goed-gefundeerd, zoals later zal blijken.

$X \subseteq Y$ en $\in /Y$ goed-gefundeerd is. Omdat $x \in Y$ en Y transitief is, geldt dat $x \subseteq Y$, zodat $x \in \mathbb{WF}$. We besluiten dat $X \subseteq \mathbb{WF}$.

(2.b) Kies nu een verzameling $X \subseteq \mathbb{WF}$. We wensen aan te tonen dat $X \in \mathbb{WF}$. Door een combinatie van het Collectie-axioma van HST toe te passen op de formule $\phi(x, y) =$ '$(x \in y) \wedge (y$ is transitief$) \wedge (\in /y$ is goed-gefundeerd$)$' en Stelling 1.2.13, bestaat er een verzameling Y zodat voor alle $x \in X$ een element $y \in Y$ bestaat met $x \in y$, y transitief en $\in /y$ goed-gefundeerd. Uit het Separatie-axioma kunnen we een nieuwe verzameling Z uit Y afleiden die alleen bestaat uit die elementen die transitief en goed-gefundeerd zijn. Door het Unie-axioma te gebruiken, vinden we uit Z een verzameling U die alle elementen van elementen van Z bevat, met andere woorden

$$U = \bigcup Z.$$

We willen nu aantonen dat $X \subseteq U$, dat U transitief is en dat $\in /U$ goed-gefundeerd is op U, waaruit volgt dat $X \in \mathbb{WF}$, wat we moesten bewijzen.
Dat X een deelverzameling van U is, volgt uit de constructie van Z. Nu tonen we de transitiviteit van U aan. Kies een $u \in U$. Dan bestaat er een element $z \in Z$ zodat $u \in z$. Omdat z transitief is, geldt dat $u \subseteq z$, zodat $u \subseteq U$.
Om aan te tonen dat $\in /U$ goed-gefundeerd is op U, kiezen we een verzameling V zodat $\emptyset \subsetneq V \subseteq U$. Kies een willekeurig element $v \in V$. Dan bestaat er een $z \in Z$ zodat $v \in z$. We bekijken de verzameling $V \cap z$. Omdat $v \in V \cap z$ is $V \cap z \neq \emptyset$. Bovendien is $\in /z$ goed-gefundeerd, zodat er een $\in /z$-minimaal element a bestaat van $V \cap z$. We tonen nu aan dat a een $\in /U$-minimaal element is van V. Zij dus $b \in a \cap U$. We moeten aantonen dat $b \notin V$.
Neem aan dat $b \in V$. Omdat z transitief is en $b \in a \in z$ geldt dat $b \in z$. Hieruit volgt dat a geen $\in /z$-minimaal element is van $V \cap z$, een tegenstrijdigheid. $\in /U$ is dus goed-gefundeerd. We concluderen dat $X \in \mathbb{WF}$.

(2.c) We tonen nu aan dat $\mathbb{WF}$ $\subseteq$-compleet is. Stel namelijk dat $Y \subseteq X \in \mathbb{WF}$. Wegens dat $\mathbb{WF}$ transitief is, geldt dat $X \subseteq \mathbb{WF}$, zodat $Y \subseteq \mathbb{WF}$. Door het voorgaande geldt dat $Y \in \mathbb{WF}$. We besluiten dat $\mathbb{WF}$ $\subseteq$-compleet is.

(2.d) We wensen nu aan te tonen dat $\in /\mathbb{WF}$ goed-gefundeerd is. Kies een verzameling Y zodat $\emptyset \subsetneq Y \subseteq \mathbb{WF}$. We moeten aantonen dat er een $\in /\mathbb{WF}$-minimaal element van Y bestaat. Uit (2.b) halen we dat $Y \in \mathbb{WF}$. Er bestaat dus een transtieve verzameling X zodat $Y \subseteq X$ en zodat $\in /X$ goed-gefundeerd is. Omdat $\in /X$ goed-gefundeerd is en $\emptyset \subsetneq Y \subseteq X$ hebben we dat er een $\in /X$-minimaal element a van Y bestaat. Bovendien is $a \in Y \subseteq \mathbb{WF}$, zodat $a \in \mathbb{WF}$. We besluiten dat voor alle $y \in Y = Y \cap X = Y \cap \mathbb{WF}$ geldt dat $y \notin a$, zodat a een $\in /\mathbb{WF}$-minimaal element van Y is.

(3.) Uit het axioma 'Transitiviteit van $\mathbb{I}$'. $\square$

1.2.18 Gevolg. *Definitie 1.2.16 is een zinvolle definitie.*

Bewijs. [32] Definieer

$$\begin{array}{rcl} G(x,y)=z & \Leftrightarrow & ((x,y),z)\in G \\ & \Leftrightarrow & [\text{‘}y\ \textbf{is functie}\text{’}\wedge \exists u(z={}^{S}u\wedge \text{‘}u\ \textbf{is beeld van}\ y\text{’})] \\ & \vee & [\text{‘}y\ \textbf{is geen functie}\text{’}\wedge z=\emptyset] \\ & \Leftrightarrow & [\text{‘}y\ \textbf{is functie}\text{’}\wedge \exists u(\mathrm{st}\,(z)\wedge \forall^{\mathrm{st}} v(v\in z\leftrightarrow v\in u)\wedge \text{‘}u\ \textbf{is beeld van}\ y\text{’})] \\ & \vee & [\text{‘}y\ \textbf{is geen functie}\text{’}\wedge z=\emptyset], \end{array}$$

waarbij

$$\text{‘}u\ \textbf{is beeld van}\ y\text{’} \;\equiv\; \forall v(v\in u\leftrightarrow \exists w((w,v)\in y))$$

en waarbij de formule **‘y is functie’** net zoals vroeger kan afgeleid worden. Merk op dat met ‘y is functie’ een verzameling in $\mathbb{H}$ wordt bedoeld, omdat y een parameter is in $\mathbb{H}$. Omdat $\in/\mathbb{WF}$ een goed-gefundeerde relatie is op $\mathbb{WF}$ volgt uit de stelling Goed-gefundeerde Recursie dat er een unieke functie F bestaat zodat voor alle $x\in\mathbb{WF}$

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & G(x,F/(\{y\in\mathbb{WF}\mid y\in x\})) \\ & = & {}^{S}\{F(y)\mid y\in x\} \end{array}$$

* en F hebben dus net dezelfde eigenschap: ze voldoen aan Definitie 1.2.16. Omdat F bestaat en uniek is, is $^*=F$ en bestaat *.[33] □

Er bestaat dus een formule $\Phi(x,y)$ die aanduidt dat $({}^*x=y)$. Uit de definitie van * volgt direct dat ${}^*w\in\mathbb{S}$, indien $w\in\mathbb{WF}$. Er geldt zelfs dat ${}^*\emptyset=\emptyset$, want $\emptyset\in\mathbb{WF}$ en dus is ${}^*\emptyset={}^{S}\{{}^*u\mid u\in\emptyset\}={}^{S}\emptyset=\emptyset$. De laatste gelijkheid geldt omdat $\emptyset\in\mathbb{S}$ (omdat ZFC$^{\mathrm{st}}$ vervat zit in HST) en $\emptyset$ uniek bepaald is. Alvorens te bewijzen dat * een $\in$-isomorfisme is, definiëren we de volgende eigenschap.

$*$-*Overdracht*: $\phi^{\mathrm{wf}}(x,y,\dots)\leftrightarrow\phi^{\mathrm{int}}({}^*x,{}^*y,\dots)$,
met ϕ een willekeurige $\in$-formule met $x,y,\dots\in\mathbb{WF}$.[34]

1.2.19 Stelling.

1. *$x\mapsto {}^*x$ is een $\in$-isomorfisme van $\mathbb{WF}$ op $\mathbb{S}$.*
2. *Zowel $\mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ als $\mathbb{WF}$ interpreteren ZFC in HST. Bovendien geldt $*$-Overdracht.*

[32] Het bewijs is volledig zelf uitgewerkt.
[33] In feite moet men Definitie 1.2.16 herschrijven als: ‘definieer * als F’.
[34] Dit betekent dat * een $\in$-elementaire inbedding is van $\mathbb{WF}$ in $\mathbb{I}$.

Bewijs. (1) Uit de definitie van * volgt dat $^*w \in \mathbb{S}$, indien $w \in \mathbb{WF}$. We tonen eerst aan dat * injectief is. Stel dat $\Phi(x,y)$ de formule is die aanduidt dat $(^*x = y)$. Definieer de klasse

$$Z := \{X \in \mathbb{WF} \mid \exists Y(Y \in \mathbb{WF} \wedge {}^*X = {}^*Y \wedge X \neq Y)\}.^{35}$$

Indien Z niet-ledig is, volgt uit Stelling 1.2.5 dat er een $\in/\mathbb{WF}$-minimaal element X van Z bestaat. Dan bestaat er een element $Y \in \mathbb{WF}$ zodat

$$^*X = {}^*Y \text{ en } X \neq Y.$$

Ofwel is X een $\in/\mathbb{WF}$-minimaal element van $\mathbb{WF}$, ofwel bestaan er elementen z in $\mathbb{WF}$ zodat $z \in X$. In het eerste geval is $X = \emptyset$, zodat $^*Y = \emptyset$. Uit de definitie van * volgt dat $Y = \emptyset$, een tegenstrijdigheid. In het tweede geval bestaan er elementen $z \in X$.

$$^*X = {}^S\{^*x \mid x \in X\} = {}^S\{^*y \mid y \in Y\} = {}^*Y,$$

zodat uit de definitie van $^S\{\dots\}$ volgt dat

$$\{^*x \mid x \in X\} \cap \mathbb{S} = \{^*y \mid y \in Y\} \cap \mathbb{S},$$

zodat (wegens $^*x, {}^*y \in \mathbb{S}$)

$$\{^*x \mid x \in X\} = \{^*y \mid y \in Y\}.$$

Indien $x \in X$ en $y \in Y$ met $^*x = {}^*y$, volgt uit de $\in/\mathbb{WF}$-minimaliteit van X dat $x = y$. Door gebruik te maken van het Extensionaliteitsaxioma kunnen we besluiten dat $X = Y$.

We tonen nu aan dat * surjectief is. Definieer de klasse

$$Z := \{z \in \mathbb{S} \mid \exists u(u \in \mathbb{WF} \wedge {}^*u = z)\}.$$

We wensen aan te tonen dat $Z = \mathbb{S}$. Omdat $\in/\mathbb{S}$ een goed-gefundeerde relatie is op $\mathbb{S}$ (zie Hulpstelling 1.2.17), kunnen we dit door middel van Goed-gefundeerde Inductie aantonen. Het enige dat we moeten aantonen is dat elk $\in/\mathbb{S}$-minimaal element van $\mathbb{S}$ behoort tot Z en dat elk standaard element z, waarvoor alle standaard elementen $y \in z$ tot Z behoren, zelf ook tot Z behoort.
Omdat $\mathbb{S}$ een ZFC-universum is, is het enige $\in/\mathbb{S}$-minimaal element van $\mathbb{S}$ de ledige verzameling. Omdat $^*\emptyset = \emptyset$, behoort dit $\in/\mathbb{S}$-minimaal element tot Z.
Stel z is een standaard verzameling waarvoor alle standaard elementen $y \in z$ tot Z behoren. Door het Collectie-axioma met de formule $\Phi'(y,x) = \Phi(x,y)(= {}^*x = y)$ en de verzameling $\{y \in z \mid \mathrm{st}\,(y)\}$, volgt dat er een verzameling V bestaat zodat voor alle standaard $y \in z$ geldt dat er een $v \in V$ bestaat zodat $\Phi(v,y) = (^*v = y)$ geldt. Definieer nu

$$w := \{v \in V \mid v \in \mathbb{WF} \wedge \exists y(^*v = y \wedge y \in z \wedge \mathrm{st}\, y)\}.$$

[35] De formule $^*X = {}^*Y$ betekent hier $\exists U \exists V(U = V \wedge \Phi(X,U) \wedge \Phi(Y,V))$.

w is een verzameling in HST en een deelverzameling van $\mathbb{WF}$. Omdat $w \subseteq \mathbb{WF}$, is $w \in \mathbb{WF}$ en weten we dat ${}^*w$ gedefinieerd is. We hebben dus

$$\begin{aligned} {}^*w &= {}^S\{{}^*v \mid v \in w\} \\ &= {}^S\{{}^*v \mid \exists y({}^*v = y \wedge y \in z \wedge \operatorname{st} y) \wedge v \in V\} \\ &= {}^S\{y \mid y \in z \wedge \operatorname{st} y\} \\ &= z. \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid volgt uit Stelling 1.1.13. We besluiten dat $z \in Z$. Door middel van Goed-gefundeerde Inductie volgt hieruit dat $Z = \mathbb{S}$.

Het enige dat we nog moeten aantonen, voor een $\in$-isomorfisme, is dat voor elke $u, v \in \mathbb{WF}$ geldt dat $u \in v \Leftrightarrow {}^*u \in {}^*v$. De richting '$u \in v \Rightarrow {}^*u \in {}^*v$' is triviaal, omdat ${}^*u \in \mathbb{S}$ en omdat ${}^*v = {}^S\{{}^*w \mid w \in v\}$ alle standaard elementen van $\{{}^*w \mid w \in v\}$ bevat. Stel nu dat ${}^*u \in {}^*v$. Dan is ${}^*u$ een standaard element dat in de verzameling ${}^*v = {}^S\{{}^*y \mid y \in v\}$ zit. Omdat ${}^SA$ de unieke verzameling is zodat ${}^SA \cap \mathbb{S} = A \cap \mathbb{S}$, geldt dat ${}^*u \in \{{}^*y \mid y \in v\}$. We besluiten dat $u \in v$ wegens de injectiviteit van *.

(2) $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ interpreteren ZFC wegens de axioma's van HST en het axioma Overdracht. Ook $\mathbb{WF}$ interpreteert ZFC omdat * een $\in$-isomorfisme is van $\mathbb{WF}$ naar $\mathbb{S}$. We tonen nu $*$-Overdracht aan. Kies een willekeurige $\in$-formule ϕ en $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{WF}$. Dan geldt

$$\phi^{\mathrm{wf}}(x_1, \ldots, x_n) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \phi^{\mathrm{st}}({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n) \overset{\text{Overdracht}}{\Longleftrightarrow} \phi^{\mathrm{int}}({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n).$$

□

Een andere manier om aan te tonen dat * surjectief is, is door zijn inverse afbeelding $\hat{}$ te construeren[36]. Verwijder uit een standaard verzameling x al zijn niet-standaard elementen. We behouden dan enkel de standaard elementen van x over. Doe voor deze standaard elementen hetzelfde en ga zo door. Het resultaat is een verzameling $\hat{x}$, die de gecondenseerde verzameling van x wordt genoemd. We besluiten dat $\hat{x} = \{\hat{y} \mid y \in x \wedge \operatorname{st}(y)\}$ voor een $x \in \mathbb{S}$. Dit is de inverse afbeelding van *. Dat deze inverse afbeelding goed-gedefinieerd is in HST kan men op analoge wijze aantonen als voor *, omdat $\in / \mathbb{S}$ goed-gefundeerd is. De volgende stelling, die we later nog nodig zullen hebben, is een gevolg van de vorige stelling.

[36]De bovenbouw van een verzameling (zie Bijlage C.1.1) wordt ook door $\frown$ genoteerd, maar de context zal duidelijk maken welke van de twee we bedoelen. (Meestal bedoelen we met $\frown$ de bovenbouw.)

1.2.20 Gevolg.

1. *Stel dat ZFC* $\vdash \forall x_1, \ldots x_n \exists! y \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$. *Dan bestaat er voor alle* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{WF}$ *een unieke verzameling* $y \in \mathbb{WF}$ *zodat* $\phi^{wf}(x_1, \ldots, x_n, y)$. *Analoog voor* $\mathbb{S}$ *en* $\mathbb{I}$.

2. *Stel* $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ *is een* $\in$*-formule en* $x_1, \ldots, x_n, X \in \mathbb{WF}$. *Dan bestaat er een verzameling* $Y \in \mathbb{WF}$ *zodat* $\forall^{wf} y(y \in Y \leftrightarrow y \in X \wedge \psi^{wf}(x_1, \ldots, x_n, y))$. *Analoog voor* $\mathbb{I}$ *en* $\mathbb{S}$. *Bovendien geldt voor* $\mathbb{WF}$ *en* $\mathbb{I}$ *dat* $Y = \{y \in X \mid \psi^{wf}(x_1, \ldots, x_n, y)\}$.

3. *Stel* $\chi(x_1, \ldots, x_n, y)$ *is een* $\in$*-formule en stel dat voor* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{S}$ *er een unieke* $y \in \mathbb{I}$ *bestaat zodat* $\chi^{int}(x_1, \ldots, x_n, y)$. *Dan is* $y \in \mathbb{S}$.

Bewijs. (1.) Dit volgt triviaal uit het feit dat de klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ ZFC interpreteren.

(2.) Bekijk de formule

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, \ldots, x_n, X, Y) &\equiv Y = \{y \in X \mid \psi(x_1, \ldots, x_n, y)\} \\ &\equiv \forall y(y \in Y \leftrightarrow y \in X \wedge \psi(x_1, \ldots, x_n, y)). \end{aligned}$$

Omdat ZFC $\vdash \forall x_1, \ldots x_n \forall X \exists! Y \phi(x_1, \ldots, x_n, X, Y)$, volgt het te bewijzen uit (1.). Omdat bovendien $\mathbb{WF}$ transitief is, is $Y \subseteq \mathbb{WF}$ en $X \subseteq \mathbb{WF}$, zodat $Y = \{y \in X \mid \psi^{\mathrm{wf}}(x_1, \ldots, x_n, y)\}$. Analoog voor $\mathbb{I}$.

(3.) Voor de standaard parameters $x_1, \ldots, x_n$ geldt de formule $\exists^{\mathrm{int}} z\, \chi^{\mathrm{int}}(x_1, \ldots, x_n, z)$, zodat uit het axioma Overdracht volgt dat $\exists^{\mathrm{st}} z\, \chi^{\mathrm{st}}(x_1, \ldots, x_n, z)$ geldt. Hieruit volgt dat er een $y' \in \mathbb{S}$ bestaat zodat $\chi^{\mathrm{st}}(x_1, \ldots, x_n, y')$ geldt. Opnieuw door Overdracht geldt dan ook $\chi^{\mathrm{int}}(x_1, \ldots, x_n, y')$. Omdat y uniek is, is $y = y' \in \mathbb{S}$. □

We tonen nu aan dat $\mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ en $\mathbb{WF}$ geen verzamelingen zijn in HST. Bovendien tonen we aan dat er voor elke verzameling $X \subseteq \mathbb{I}$ een standaard verzameling S bestaat zodat $X \subseteq S$.

1.2.21 Gevolg.

1. $\mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ *en* $\mathbb{WF}$ *zijn echte klassen, met andere woorden geen verzamelingen, in HST.*

2. *Als* $X \subseteq \mathbb{I}$, *dan bestaat er een standaard verzameling* S *zodat* $X \subseteq S$.

Bewijs. (1.) Zij $\mathbb{WF}$ een verzameling. Dan volgt uit Hulpstelling 1.2.17 dat $\mathbb{WF} \in \mathbb{WF}$, een tegenstrijdigheid wegens Stelling 1.1.12. Indien $\mathbb{S}$ een verzameling is in HST, dan is $\mathbb{WF}$ ook een verzameling door de inverse afbeelding van * te beschouwen in het Vervangingsaxioma, een tegenstrijdigheid.
Indien $\mathbb{I}$ een verzameling is, dan vinden we dat, door het Separatie-axioma toe te passen op de formule $\mathrm{st}\,(x)$, $\mathbb{S}$ een verzameling is, een tegenstrijdigheid.

(2.) Voor elk element $x \in X$, bestaat er een element $y \in \mathbb{WF}$ zodat $x \in {}^*y$. Door het Collectie-axioma toe te passen op de formule $\phi(x, y) = x \in {}^*y \wedge y \in \mathbb{WF}$, bestaat er een verzameling Y zodat voor alle $x \in X$ een $y \in Y$ bestaat met $x \in {}^*y$ en $y \in \mathbb{WF}$. Noem $Z := \{y \in Y \mid \mathrm{wf}(y)\}$. Z is een verzameling door gebruik te maken van het Separatie-axioma. Omdat $Z \subseteq \mathbb{WF}$, volgt uit Hulpstelling 1.2.17 dat $Z \in \mathbb{WF}$. Definieer $U = \bigcup Z$. Omdat $\mathbb{WF}$ transitief is, volgt eenvoudig dat $U \subseteq \mathbb{WF}$, zodat ook $U \in \mathbb{WF}$. Definieer nu $S = {}^*U = {}^S\{{}^*u \mid u \in U\} \in \mathbb{S}$. Voor elke $x \in X$ bestaat er een $z \in Z$ zodat $x \in {}^*z$. Nu geldt voor een willekeurige $z \in Z$

$$(\forall^{\mathrm{wf}} v \in z)(v \in U),$$

zodat uit $*$-Overdracht volgt dat $(\forall^{\mathrm{int}} v \in {}^*z)(v \in {}^*U)$. We besluiten dat $x \in {}^*U$, zodat $X \subseteq U$. □

1.3 Eigenschappen van HST

In deze paragraaf geven we enkele eigenschappen van HST die nodig zijn in latere besprekingen.

1.3.1 Absolute afbeeldingen

Zoals we later zullen zien in Hoofdstuk 2 laten we $\mathbb{WF}$ overeen komen met de traditionele wiskunde. Het universum $\mathbb{WF}$ is transitief en $\subseteq$-compleet, waardoor veel definities die we interpreteren in $\mathbb{H}$ gelijk zijn aan de definities die we interpreteren in $\mathbb{WF}$. Zie verder voor enkele voorbeelden.

1.3.1 Definitie. Stel $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{H}$ is een st-$\in$-definieerbare klasse van verzamelingen (met andere woorden '$x \in \mathbb{A}$' kan uitgedrukt worden met een st-$\in$-formule).

- Een st-$\in$-formule $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ wordt **absoluut voor** $\mathbb{A}$ genoemd als

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{A} \left(\Phi^{\mathbb{A}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \Phi(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

- Een verzameling X, waarvoor er een st-$\in$-formule Φ bestaat zodat X de enige verzameling is waarvoor $\Phi(X)$ geldt, wordt **absoluut voor** $\mathbb{A}$ genoemd als $\Phi(x)$ en $\exists! x \Phi(x)$ absoluut zijn. Hieruit volgt dat $X \in \mathbb{A}$.[37]

- Een functie $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(x_1, \ldots, x_n)$ wordt **absoluut voor** $\mathbb{A}$ genoemd als de formules $y = F(x_1, \ldots, x_n)$ en $\exists! y\, (y = F(x_1, \ldots, x_n))$ absoluut zijn.

Iets is dus absoluut voor $\mathbb{A}$ als het niet van afhangt in welk universum ($\mathbb{A}$ of $\mathbb{H}$) het wordt opgebouwd/gedefinieerd. Bijvoorbeeld $\{x, y\}$ is absoluut voor $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ (zie Stelling 1.3.3).

[37] Dit is hetzelfde als zeggen dat $\Phi(x)$ absoluut is en $X \in \mathbb{A}$, indien X de enige verzameling is waarvoor $\Phi(X)$ geldt. Indien een verzameling absoluut is voor $\mathbb{A}$, dan betekent dit niet dat voor *alle* formules Ψ, waarvoor X de enige verzameling is waarvoor $\Psi(X)$ waar is, geldt dat $\Psi(x)$ en $\exists! x \Psi(x)$ absoluut zijn.

1.3.2 Definitie. Voor een interne verzameling X definiëren we $\mathcal{P}_{\text{int}}(X)$ als de machtsverzameling van X met betrekking tot het ZFC-universum $\mathbb{I}$. Omdat $\mathbb{I}$ transitief is, is $\mathcal{P}_{\text{int}}(X)$ gelijk aan $\mathcal{P}(X) \cap \mathbb{I}$.[38]

1.3.3 Stelling.

1. *De klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ zijn gesloten onder 'paar', 'unie', 'doorsnede' en 'cartesisch product'. Bovendien zijn deze afbeeldingen absoluut voor $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$.*

2. *Voor elke $X, Y \in \mathbb{WF}$, zijn $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{F}(Y,X) = \{f : Y \to X \mid f \text{ is functie}\}$ verzamelingen in $\mathbb{WF}$. Bovendien zijn de functies 'machtsverzameling': $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ en 'functieverzameling': $(X,Y) \mapsto \mathcal{F}(Y,X)$ absoluut voor $\mathbb{WF}$.*

3. *Voor elke $X \in \mathbb{I}$ bestaat de verzameling $\mathcal{P}_{int}(X)$. Deze verzameling wordt de **interne machtsverzameling van** X genoemd. Indien X standaard is, dan is ook $\mathcal{P}_{int}(X)$ een standaard verzameling.*

Bewijs. (1.) Stel dat P de afbeelding 'paar', U de afbeelding 'unie', D de afbeelding 'doorsnede' en C de afbeelding 'cartesisch product' voorstellen. Bijvoorbeeld is

$$\begin{aligned}
P(X,Y) = Z \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall z(z \in Z \leftrightarrow z = X \vee z = Y),\\
C(X,Y) = Z \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall z(z \in Z \leftrightarrow \exists x \exists y(x \in X \wedge y \in Y \wedge P(x, P(x,y)) = z)),\\
U(X) = Y \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall y(y \in Y \leftrightarrow \exists x(x \in X \wedge y \in x)),\\
D(X) = Y \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall y(y \in Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \to y \in x)).
\end{aligned}$$

We wensen aan te tonen dat deze formules, en de formules $\exists! Z(C(X,Y) = Z)$, $\exists! Z(P(X,Y) = Z)$, $\exists! Z(U(X) = Z)$ en $\exists! Z(D(X) = Z)$, absoluut zijn ten opzichte van $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$. Voor de absoluutheid van deze laatste formules is het voldoende aan te tonen dat $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ gesloten zijn onder P, U, D en C. Dit betekent dat de unie, paar, doorsnede en cartesisch product van elementen van $\mathbb{WF}$, resp. $\mathbb{S}$, resp. $\mathbb{I}$, bekeken ten opzichte van $\mathbb{H}$ opnieuw in $\mathbb{WF}$, resp. $\mathbb{S}$, resp. $\mathbb{I}$, zit.

We tonen het nu aan voor P ten opzichte van $\mathbb{WF}$. Zij X, Y en Z willekeurige elementen van $\mathbb{WF}$. Indien $(P(X,Y) = Z)^{\text{wf}}$ waar is, dan volgt uit de transitiviteit van $\mathbb{WF}$ dat ook $P(X,Y) = Z$ waar is. Omgekeerd is dit triviaal ook geldig. We wensen nog aan te tonen dat voor twee willekeurige verzamelingen X en Y uit $\mathbb{WF}$ geldt dat $P(X,Y)$ ook een verzameling is in $\mathbb{WF}$. Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is volgt uit Gevolg 1.2.20(1.) dat er een goed-gefundeerde verzameling Z bestaat zodanig dat $(P(X,Y) = Z)^{\text{wf}}$ waar is. Hieruit volgt dat ook $P(X,Y) = Z$ waar is, zodat Z gelijk is aan het paar $\{X,Y\}$ bekeken ten opzichte van $\mathbb{H}$.

[38] $\mathcal{P}(X)$ is niet noodzakelijk een verzameling in $\mathbb{H}$. Bijvoorbeeld zullen we zien in de paradox van Hrbaček dat elke oneindige interne verzameling geen machtsverzameling heeft in $\mathbb{H}$.

We tonen het nu aan voor C ten opzichte van $\mathbb{WF}$. Zij X, Y en Z willekeurige elementen van $\mathbb{WF}$. Indien $(C(X,Y) = Z)^{\mathrm{wf}}$ waar is, dan volgt uit de transitiviteit van $\mathbb{WF}$ en de absoluutheid van P ten opzichte van $\mathbb{WF}$ dat ook $C(X,Y) = Z$ waar is. Omgekeerd is dit geldig wegens dezelfde redenen. We moeten nog aantonen dat voor twee verzamelingen X en Y in $\mathbb{WF}$, de verzameling $C(X,Y)$ ook een verzameling is in $\mathbb{WF}$: omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is volgt uit Gevolg 1.2.20(1.) dat er een goed-gefundeerde verzameling Z bestaat zodanig dat $(C(X,Y) = Z)^{\mathrm{wf}}$ waar is. Hieruit volgt dat ook $C(X,Y) = Z$ waar is, zodat Z gelijk is aan het cartesisch product van X en Y ten opzichte van $\mathbb{H}$.

Analoog voor de afbeeldingen U en D ten opzichte van $\mathbb{WF}$. Ook voor transitieve klasse $\mathbb{I}$ kunnen we dezelfde redeneringen gebruiken.

De absoluutheid van de formules $C(X,Y) = Z$, $P(X,Y) = Z$, $U(X) = Y$ en $D(X) = Y$ voor $\mathbb{S}$ volgt uit Overdracht en de absoluutheid van die formules voor $\mathbb{I}$. Het enige dat we nog moeten aantonen is dat $\mathbb{S}$ gesloten is onder P, U, D en C. We tonen het bijvoorbeeld aan voor U. Omdat $\mathbb{S}$ een ZFC-universum is volgt uit Gevolg 1.2.20(1.) dat er een standaard verzameling Y bestaat zodanig dat $(U(X) = Y)^{\mathrm{st}}$ waar is. Hieruit volgt dat ook $U(X) = Y$ waar is, zodat Y gelijk is aan de unie van X ten opzichte van $\mathbb{H}$.

(2.) Noteer de afbeelding ‘machtsverzameling’ als M en de afbeelding ‘functieverzameling’ als F. We wensen aan te tonen dat de formules $M(X) = Y$ en $F(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y) = Z$ absoluut zijn voor $\mathbb{WF}$ en dat voor verzamelingen X, Y in $\mathbb{WF}$, $M(X)$ en $F(X,Y)$ ook verzamelingen zijn in $\mathbb{WF}$.

$$\begin{aligned}
M(X) = Y \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall y(y \in Y \leftrightarrow \forall x(x \in y \rightarrow x \in X)),\\
F(X,Y) = Z \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall z(z \in Z \leftrightarrow [\forall u(u \in z \rightarrow \exists x \exists y(u = (x,y) \wedge x \in X \wedge y \in Y))\\
&\qquad\qquad\qquad \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1((x_1,y_1) \in z \wedge (x_2,y_1) \in z \rightarrow x_1 = x_2)]).
\end{aligned}$$

We tonen het bijvoorbeeld aan voor M. Op analoge wijze kan men het aantonen voor F. Zij X en Y twee willekeurige verzamelingen in $\mathbb{WF}$. Indien $(M(X) = Y)^{\mathrm{wf}}$ waar is, dan is $M(X) = Y$ ook waar: $M(X) = Y$ kunnen we opsplitsen in twee formules. Voor de ene formule $\forall y(y \in Y \rightarrow \forall x(x \in y \rightarrow x \in X))$ is het vrij eenvoudig aan te tonen dat uit de relativisatie van de formule tot $\mathbb{WF}$ de volledige formule volgt. De andere formule $\forall y(y \in Y \leftarrow \forall x(x \in y \rightarrow x \in X))$ is wat moeilijker: kies een willekeurige y zodat $\forall x(x \in y \rightarrow x \in X)$ geldt. We wensen aan te tonen dat $y \in Y$, wetende dat $(M(X) = Y)^{\mathrm{wf}}$ waar is. Indien $y \in \mathbb{WF}$, dan volgt het te bewijzen direct uit $(M(X) = Y)^{\mathrm{wf}}$. Nu is $y \subseteq X$, zodat uit de $\subseteq$-compleetheid van $\mathbb{WF}$ volgt dat $y \in \mathbb{WF}$.
Om aan te tonen dat $(M(X) = Y)^{\mathrm{wf}}$ volgt uit $M(X) = Y$ gaat men op analoge wijze tewerk. Het enige dat we nu nog moeten aantonen is dat voor een verzameling $X \in \mathbb{WF}$, $M(X)$ ook een verzameling is van $\mathbb{WF}$. Uit Gevolg 1.2.20(1.) volgt dat er een Y bestaat zodat $(M(X) = Y)^{\mathrm{wf}}$ waar is. Hieruit volgt dat $M(X) = Y$ ook waar is, zodat de machtklasse van een verzameling in $\mathbb{WF}$ ook een verzameling is in $\mathbb{WF}$.

(3.) Uit Gevolg 1.2.20(1.) volgt dat $\mathcal{P}_{\text{int}}(X)$ bestaat. Omdat $\mathbb{I}$ transitief is, is $\mathcal{P}_{\text{int}}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathbb{I}$.[39] Indien $X \in \mathbb{S}$, dan volgt uit Gevolg 1.2.20(3.) dat $\mathcal{P}_{\text{int}}(X) \in \mathbb{S}$. $\square$

1.3.4 Stelling. *Indien $X \in \mathbb{WF}$, dan is $^*(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}_{int}(^*X)$.*

Bewijs. Bekijk de $\in$-formule

$$\Phi(X, P) = \forall y(y \in P \Leftrightarrow \forall z(z \in y \rightarrow z \in X)).$$

Omwille van Stelling 1.3.3 en de transitiviteit van $\mathbb{WF}$, geldt $\Phi^{\text{wf}}(X, \mathcal{P}(X))$, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat

$$\forall^{\text{int}} y(y \in {}^*\mathcal{P}(X) \Leftrightarrow \forall^{\text{int}} z(z \in y \rightarrow z \in {}^*X)). \tag{1.2}$$

waar is. Kies een willekeurig element y uit $^*\mathcal{P}(X) \in \mathbb{I}$. Uit de transitiviteit van $\mathbb{I}$ halen we dat $y \in \mathbb{I}$ en ook $y \subseteq \mathbb{I}$, zodat uit vergelijking (1.2) volgt dat $y \in \mathcal{P}_{\text{int}}(^*X)$. Omgekeerd, stel dat $y \in \mathcal{P}_{\text{int}}(^*X)$. Dan is $y \in \mathbb{I}$, zodat wegens vergelijking (1.2) geldt dat $y \in {}^*\mathcal{P}(X)$. $\square$

Deze stelling is ook datgene dat we verwachten bij een modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse. Indien we naar zo'n benadering kijken, dan is namelijk ook $\mathcal{P}_{\text{int}}(^*X) = {}^*\mathcal{P}(X)$.
Net zoals in een modeltheoretische benadering geldt in HST dat $\mathcal{P}_{\text{int}}(X) \subsetneq \mathcal{P}(X)$ voor bepaalde verzamelingen X. Dit zal namelijk zo zijn als X een deelverzameling bevat die niet intern is. (Dat $\mathbb{I}$ niet $\subseteq$-compleet is, is van cruciaal belang.) Later zullen we aantonen dat $^*\mathbb{N} \in \mathbb{I}$, maar $^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} \notin \mathbb{I}$.[40] Bovendien tonen we aan dat er interne verzamelingen X bestaan waarvoor zelfs $\mathcal{P}(X)$ niet bestaat (zie de paradox van Hrbaček).

1.3.2 Ordinalen, Kardinalen en Natuurlijke getallen

In deze sectie geven we een bespreking van ordinalen, kardinalen en natuurlijke getallen.

1.3.5 Definitie. Een relatie $\prec$ wordt een **(strikte) orderelatie** genoemd op X indien de relatie niet-symmetrisch en transitief is. Niet-symmetrisch wil zeggen dat er geen elementen x en y in X bestaan zodat $x \prec y$ en $y \prec x$. Hieruit volgt dat er geen element x in X bestaat zodat $x \prec x$. Transitief wil zeggen dat voor elke drie elementen x, y en z in X geldt dat indien $x \prec y$ en $y \prec z$, dat dan $x \prec z$.

1.3.6 Definitie. Een orderelatie op X wordt **lineair of totaal** genoemd indien voor elke twee verschillende elementen x en y van X geldt dat ofwel $x \prec y$ ofwel $y \prec x$.

1.3.7 Definitie. Een verzameling (of klasse) X wordt **goed-geordend** genoemd met betrekking tot $\prec$ indien $\prec$ een lineaire orderelatie is op X en $\prec$ goed-gefundeerd is op X.

[39] Het is mogelijk dat $\mathcal{P}(X)$ geen verzameling is.
[40] Zie Stelling 1.3.21.

1.3.8 Definitie. Een **ordinaal** is een transitieve verzameling goed-geordend door $\in$. Een **kardinaal** is een ordinaal dat niet bijectief is met een kleiner ordinaal, m.a.w. een beginordinaal. Ord, respectievelijk Kard, zijn de verzamelingen van de ordinalen, respectievelijk de kardinalen.

1.3.9 Notatie. We noteren $x < y$ voor twee ordinalen x en y indien $x \in y$.

1.3.10 Definitie. Een **opvolgersordinaal** is een ordinaal x waarvoor er een ordinaal y bestaat zodat $x = y \cup \{y\}$. $y \cup \{y\}$ wordt ook genoteerd als $y + 1$. Een **limietordinaal** is een niet-nul ordinaal dat geen opvolgersordinaal is.

Deze definities zijn gedefinieerd in $\mathbb{H}$, het universum van HST. Natuurlijk kan men dit ook definiëren in $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$. Men kan de definitie van een ordinaal uitdrukken met een formule $\Phi(x)$ (zie Stelling 1.3.11: $\Phi(x) = \Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$). Een ordinaal ten opzichte van bijvoorbeeld $\mathbb{I}$ is een element van $\mathbb{I}$ dat voldoet aan $\Phi^{\text{int}}(x)$. Zo'n ordinaal noemen we een $\mathbb{I}$-ordinaal en hoeft niet noodzakelijk een $\mathbb{H}$-ordinaal te zijn.
Een vraag die men zich kan stellen is of de ordinalen in $\mathbb{H}$ dezelfde ZFC-eigenschappen hebben als vroeger. Indien we spreken van een ordinaal, bedoelen we vanaf nu een ordinaal over $\mathbb{H}$. Uit deze bespreking leren we ook dat werken in HST meer is dan werken in $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$, aangezien in $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ niet alle ordinalen vervat zitten[41].

1.3.11 Stelling.

1. *Ordinalen en $\mathbb{WF}$-ordinalen zijn gelijk.*
2. *Kardinalen en $\mathbb{WF}$-kardinalen zijn gelijk.*

Bewijs. (1.) Stel $\Phi_1(x)$ stelt de $\in$-formule 'x is transtief' voor en $\Phi_2(x)$ stelt de $\in$-formule 'x is goed-geordend met $\in$' voor. Bijvoorbeeld is

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \text{'}x \text{ is transtief'} \\ &= \forall y (y \in x \to \forall z (z \in y \to z \in x)) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \text{'}x \text{ is lineair geordend met } \in\text{'} \wedge \text{'}x \text{ is goed gefundeerd met } \in\text{'} \\ &= \forall y \forall u (y \in x \wedge u \in x \to u = y \vee y \in u \vee u \in y) \\ &\wedge \ \forall y \left(\forall z (z \in y \to z \in x) \to \exists u (u \in y \wedge \forall v (v \in y \to v \notin u))\right). \end{aligned}$$

Stel x is een ordinaal, zodat $\Phi_1(x) \wedge \Phi_2(x)$ geldt. Op triviale wijze geldt dan ook $\Phi_1^{\text{wf}}(x)$, want we beperken de kwantoren tot een minder aantal verzamelingen. Omdat elk ordinaal, dus ook x, in $\mathbb{WF}$ zit en bovendien $\mathbb{WF}$ transitief en $\subseteq$-compleet is, volgt dat $\Phi_2^{\text{wf}}(x)$ geldt. Stel x is een $\mathbb{WF}$-ordinaal, zodat $\Phi_1^{\text{wf}}(x) \wedge \Phi_2^{\text{wf}}(x)$ geldt. We weten dan dat $x \in \mathbb{WF}$. Omdat $\mathbb{WF}$ transitief en $\subseteq$-compleet is, zijn alle elementen in de formule $\Phi_1(x)$ en $\Phi_2(x)$

[41] Zie Bijlage C voor een definitie van $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$.

ook elementen van $\mathbb{WF}$, zodat $\Phi_i(x)$ volgt uit $\Phi_i^{\text{wf}}(x)$. We besluiten dat een $\mathbb{WF}$-ordinaal en een ordinaal dezelfde begrippen zijn.

(2.) Op analoge wijze kan men dit aantonen voor kardinalen. Men heeft nodig dat een bijectie tussen twee ordinalen altijd in $\mathbb{WF}$ zit. Dit is zo, omdat een functie tussen twee elementen van $\mathbb{WF}$ altijd een element is van $\mathbb{WF}$ (zie 1.3.3(2.)). □

Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is, kunnen we besluiten dat de ordinalen in $\mathbb{H}$ aan dezelfde eigenschappen voldoen als in ZFC. Voor enkele belangrijke kenmerken van ordinalen verwijzen we naar Bijlage D. Bijvoorbeeld wordt Ord goed-geordend door $\in$, zodat we transfiniete inductie kunnen gebruiken, enzovoort. Bovendien is Ord geen verzameling in HST: er bestaat een eigenschap van ordinalen in ZFC die zegt dat er voor elke niet-ledige deelverzameling van Ord een element bestaat in Ord dat groter is (volgens de ordening $\in$) dan elk element van die deelverzameling (zie Stelling D.0.9(5.)). Indien Ord een verzameling is in $\mathbb{H}$, levert dit een tegenstrijdigheid op.

1.3.12 Definitie. Een **$*$-ordinaal**, respectievelijk een **$*$-kardinaal** is een ordinaal, respectievelijk kardinaal met betrekking tot $\mathbb{I}$, met andere woorden het is een element van $\mathbb{I}$ dat voldoet aan $\Phi_1^{\text{int}}(x)$ en $\Phi_2^{\text{int}}(x)$ met $\Phi_i(x)$ uit Stelling 1.3.11. *Ord is de klasse van alle $*$-ordinalen. Analoog voor *Kard. Uit het axioma Overdracht volgt dat voor standaard verzamelingen x geldt dat $\Phi_i^{\text{int}}(x)$ equivalent is met $\Phi_i^{\text{st}}(x)$. We kunnen besluiten dat een $\mathbb{S}$-ordinaal hetzelfde is als een standaard $*$-ordinaal.

In ZFC heeft elke verzameling een kardinaalgetal. In HST is dat niet het geval (zie Stelling 1.3.41). Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is, heeft wel elke goed-gefundeerde verzameling een $\mathbb{WF}$-kardinaalgetal, en dus ook een $\mathbb{H}$-kardinaalgetal.
We hebben natuurlijke getallen ingevoerd in paragraaf 1.1.2, maar $\mathbb{N}$ kan ook gedefinieerd worden als het kleinste limietordinaal ω. We herinneren dat de elementen van $\mathbb{N}$ de natuurlijke getallen werden genoemd.

1.3.13 Stelling. $\mathbb{N}$ *is gelijk aan het kleinste limietordinaal* ω.

Bewijs. Dit is hetzelfde bewijs als in ZFC, aangezien $\mathbb{N}$ daar op dezelfde manier wordt gedefinieerd en omdat Ord gezien kan worden als de klasse van ordinalen ten opzichte van het ZFC-universum $\mathbb{WF}$. We verwijzen naar de literatuur voor een bewijs (bijvoorbeeld zie [4]). □

1.3.14 Definitie. Een verzameling wordt **eindig** genoemd indien de verzameling bijectief in verband staat met een natuurlijk getal. Dat natuurlijk getal wordt genoteerd als $|X|$.

We weten dat $\mathbb{N} \in$ Ord en dus ook $\mathbb{N} \in \mathbb{WF}$. Hieruit volgt dat $\mathbb{N} \subseteq$ Ord en $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{WF}$ en zelfs dat alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ in $\mathbb{WF}$ zitten. Elk natuurlijk getal is dus een ordinaal en dus ook een $\mathbb{WF}$-ordinaal. $\mathbb{WF}$-natuurlijke getallen en $\mathbb{H}$-natuurlijke getallen zijn net dezelfde objecten. Omdat $\mathbb{N} \in \mathbb{WF}$, kunnen we zelfs spreken over $^*\mathbb{N}$.

1.3.15 Definitie. De elementen van ${}^*\mathbb{N}$ worden **$*$-natuurlijke getallen** genoemd. Alle $*$-natuurlijke getallen zijn elementen van $\mathbb{I}$, wegens de transitiviteit van $\mathbb{I}$.

Beschouw een formule $\Phi =$ '$\mathbb{N}$ is de verzameling van alle natuurlijke getallen'. Omdat $\mathbb{N} \in \mathbb{WF}$ bekomen we door middel van $*$-Overdracht de volgende eigenschap: '${}^*\mathbb{N}$ is de verzameling van alle natuurlijke getallen.' Wat we hierbij moeten opmerken is dat we bij de laatste uitspraak werken in de zin van $\mathbb{I}$. We kunnen besluiten dat $*$-natuurlijke getallen in feite hetzelfde zijn als natuurlijke getallen in de zin van het ZFC-universum $\mathbb{I}$.
Uit Hulpstelling 1.3.18 volgt dat door over te gaan van $\mathbb{WF}$ naar $\mathbb{I}$, met andere woorden door over te gaan van 'gewone' natuurlijke getallen in $\mathbb{N}$ naar $*$-natuurlijke getallen in ${}^*\mathbb{N}$, er meer objecten bijkomen.

1.3.16 Definitie. Een interne verzameling X wordt **$*$-eindig** of **hypereindig** genoemd als ze eindig is in de zin van $\mathbb{I}$.[42] Met andere woorden indien de interne verzameling X bijectief in verband staat met een $*$-natuurlijk getal volgens een interne bijectie. Dat $*$-natuurlijk getal wordt genoteerd als $|X|$.

1.3.17 Stelling. *Stel X is een verzameling die zowel eindig als hypereindig is. Beide waarden $|X|$ uit definities 1.3.14 en 1.3.16 zijn gelijk.*

Bewijs. Stel dat er een bijectie bestaat van X naar $n \in \mathbb{N}$ en dat er een interne bijectie bestaat van X naar $m \in {}^*\mathbb{N}$. Hieruit volgt dat er een bijectie van $n \in \mathbb{N}$ naar $m \in {}^*\mathbb{N}$ bestaat. We willen bewijzen dat $n = m$. We kunnen dit doen door middel van inductie op n. Indien $n = 0 = \emptyset$, dan geldt trivialerwijs dat $n = m$. Stel dat $n > 0$. Dan is n een opvolgersordinaal, zodat $n = (n-1) \cup \{n-1\}$. Dan moet $m > 0$ (anders zou er een bijectie van een niet-ledige verzameling naar de ledige verzameling bestaan), zodat ook $m = (m-1) \cup \{m-1\}$. Stel dat g de bijectie is tussen n en m en stel $g(n-1) = x \in m$. In het ZFC-universum $\mathbb{I}$ bestaat er een bijectie h tussen $\{0, \ldots, m-1\} \backslash \{x\}$ en $m - 1 = \{0, \ldots, m-2\}$. We besluiten dat $h \circ g$ beperkt tot de verzameling $n-1$ een bijectie is tussen $n-1$ en $m-1$. Uit de inductiehypothese volgt dat $n-1 = m-1$, zodat $n = (n-1) \cup \{n-1\} = (m-1) \cup \{m-1\} = m$. De twee definities voor $|X|$ komen dus overeen. $\square$

Nu enkele mooie eigenschappen van natuurlijke getallen.

[42] We beschouwen alleen interne verzamelingen, want we werken in de zin van $\mathbb{I}$. Merk op dat men bij de definitie van 'eindig' wel alle verzamelingen beschouwt en niet alleen goed-gefundeerde verzamelingen, omdat een $\mathbb{WF}$-natuurlijk getal en een $\mathbb{H}$-natuurlijk getal hetzelfde zijn. Omdat $\mathbb{WF}$ transitief en $\subseteq$-compleet is, kan men eenvoudig inzien dat een verzameling X uit $\mathbb{WF}$ eindig is in de zin van $\mathbb{WF}$ als en slechts als hij eindig is in de zin van $\mathbb{H}$.

1.3.18 Hulpstelling.

1. *$n = {}^*n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\mathbb{N} = {}^*\mathbb{N} \cap \mathbb{S}$.*
3. *$\mathbb{N} \subsetneq {}^*\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ is een beginsegment van ${}^*\mathbb{N}$ en ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ heeft geen kleinste element.*

Bewijs. (1.) We tonen dit aan door middel van inductie over $\mathbb{N}$. Merk op dat $\mathbb{WF}$-natuurlijke getallen en $\mathbb{H}$-natuurlijke getallen dezelfde objecten zijn. We hebben reeds aangetoond dat ${}^*\emptyset = \emptyset$, zodat ${}^*0 = 0$. Uit inductie volgt dat

$$^*(n+1) = {}^*(n \cup \{n\}) = {}^*n \cup {}^*\{n\} \overset{\text{def}\,^*}{=} {}^*n \cup \{{}^*n\} \overset{\text{IH}}{=} n \cup \{n\} = n+1.$$

(2.) Kies een $n \in \mathbb{N}$. Dan is $n = {}^*n \in \mathbb{S} \cap {}^*\mathbb{N}$, zodat $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N} \cap \mathbb{S}$. Stel nu dat $m \in {}^*\mathbb{N} \cap \mathbb{S}$. Omdat $m \in \mathbb{S}$, bestaat er een $w \in \mathbb{WF}$ zodat ${}^*w = m \in {}^*\mathbb{N}$. Uit $*$-Overdracht volgt dan dat $w \in \mathbb{N}$. We besluiten dat $m = {}^*w \overset{(1.)}{=} w \in \mathbb{N}$ en dus is ${}^*\mathbb{N} \cap \mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$.

(3.) Uit (2.) volgt dat $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ is een beginsegment van ${}^*\mathbb{N}$: elk element kleiner dan een element van $\mathbb{N}$ is een element van $\mathbb{N}$, omdat $\mathbb{N}$ een ordinaal is en dus transitief.
Om aan te tonen dat $\mathbb{N} \subsetneq {}^*\mathbb{N}$ hebben we het axioma Saturatie nodig. Definieer voor elke $n \in \mathbb{N}$ een verzameling $X_n = \{h \in {}^*\mathbb{N} \mid h > n\}$. X_n is intern wegens Gevolg 1.2.20. Ook is $\mathbb{N}$ van standaard grootte: neem de verzameling X en de functie f in de definitie van een verzameling van standaard grootte als $X = \mathbb{N}$ en $f = id$. Uit het axioma Saturatie volgt dat $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$, zodat ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} \neq \emptyset$.[43]
${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ heeft geen $\in$-minimaal element. Indien dit wel zo was zou er een element $a \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ bestaan zodat elke $b \in a$ een element is van $\mathbb{N}$. Omdat zeker $a \neq \emptyset$, is $a = (a-1) \cup \{a-1\}$ (in de $\mathbb{I}$-zin). Omdat men a op unieke wijze uit $a-1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$ kan verkrijgen in de $\mathbb{I}$-zin, met andere woorden in ${}^*\mathbb{N}$, volgt uit Gevolg 1.2.20 dat $a \in \mathbb{S}$. We besluiten dat $a \in {}^*\mathbb{N} \cap \mathbb{S} = \mathbb{N}$, een tegenstrijdigheid. □

1.3.19 Stelling. *Het ZFC-axioma 'Regulariteit over $\emptyset$',*

$$\forall X(\neg(X = \emptyset) \to \exists x(x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$$

is niet geldig in HST.

Bewijs. Kies een willekeurige $m \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ en definieer

$$\begin{aligned} X &:= \{m - n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{k \in {}^*\mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(k = m - n)\}. \end{aligned}$$

[43] In feite moet men eerst aantonen dat $X = \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Dit kan men doen door gebruik te maken van het Collectie- en Separatie-axioma.

Door gebruik te maken van het axioma Separatie kan men aantonen dat X een verzameling is. Kies een willekeurig element $k \in \mathbb{N}$. Omdat $m \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, zijn $m-k$ en $m-(k+1)$ elementen van ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ en dus nooit gelijk aan 0. (0 is de ledige verzameling.) Dan is $m-k=\{0,\ldots,m-(k+1)\} \in {}^*\mathbb{N}$, zodat $(m-(k+1)) \in (m-k)\cap X$. Voor elk element $x \in X$ geldt dus dat $x \cap X \neq \emptyset$. □

1.3.20 Stelling. * *definieert een* $\in$*-isomorfisme tussen Ord en* $\mathbb{S}$*-Ord.*

Bewijs. Stel dat $\alpha \in$ Ord. Dan is α een $\mathbb{WF}$-ordinaal, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat $^*\alpha$ een $\mathbb{I}$-ordinaal is. Omdat $^*\alpha \in \mathbb{S}$, is $^*\alpha$ een standaard $\mathbb{I}$-ordinaal en dus ook een $\mathbb{S}$-ordinaal wegens het axioma Overdracht. Kies nu een $\beta \in \mathbb{S}$-Ord. Dan is $\beta = {}^*\alpha$ voor een zekere $\alpha \in \mathbb{WF}$. Uit het axioma Overdracht en $*$-Overdracht volgt dat $\alpha \in$ Ord, zodat β het beeld is van een element van Ord. Het bewijs volgt nu uit Stelling 1.2.19. □

Omdat Ord goed-geordend is volgens $\in$ en * een $\in$-isomorfisme is, is ook $\mathbb{S}$-Ord goed-geordend volgens $\in$. Dit geldt echter niet voor $\mathbb{I}$-Ord.

$\mathbb{I}$-Ord zijn de ordinalen in de zin van $\mathbb{I}$, zodat $\mathbb{I}$-Ord goed-geordend is volgens $\in/\mathbb{I}$, wat betekent dat elke niet-ledige *interne* deelverzameling Y van $\mathbb{I}$-Ord een $\in/\mathbb{I}$-minimaal element heeft.

1.3.21 Stelling. $\mathbb{I}$*-Ord is niet goed-geordend volgens* $\in$.[44] *Bovendien is* ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \notin \mathbb{I}$.

Bewijs. Uit Hulpstelling 1.3.18 volgt dat ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ geen $\in$-minimaal element heeft, maar er geldt wel dat ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \subseteq \mathbb{I}$-Ord. We besluiten dat $\mathbb{I}$-Ord niet goed-geordend is volgens $\in$.
Stel nu dat ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \in \mathbb{I}$. Deze verzameling zou een $\in/\mathbb{I}$-minimaal element hebben (omdat $\mathbb{I}$-Ord goed-geordend is volgens $\in/\mathbb{I}$). Omdat $\mathbb{I}$ transitief is, is dit ook een minimaal element ten opzichte van $\in$, een tegenstrijdigheid. □

Hieruit volgt dat de relatie $\in/\mathbb{I}$ niet goed-gefundeerd is. Als tegenvoorbeeld kunnen we namelijk de verzameling ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ nemen.
De elementen van ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ zijn de niet-standaard natuurlijke getallen. Ze worden 'oneindig groot' genoemd: ze zijn groter dan alle standaard natuurlijke getallen, omdat $\mathbb{N}$ een beginsegment is van ${}^*\mathbb{N}$.

1.3.3 Von Neumann hiërarchie over interne verzamelingen in HST

Zoals eerder vermeld, zorgt het Regulariteitsaxioma in ZFC ervoor dat men een mooi beeld heeft van elk ZFC-universum $\mathbb{V}$, namelijk de Von Neumann hiërarchie: $\mathbb{V} = \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi$. Definieer nu ook in HST:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &= \emptyset, \\ \mathbb{V}_{\xi+1} &= \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi), \\ \mathbb{V}_\lambda &= \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi \text{ met } \lambda \text{ een limietordinaal.} \end{aligned}$$

[44] Hierbij kijken we naar alle deelverzamelingen van $\mathbb{I}$-Ord.

1.3.22 Stelling. *Voor elke $\xi \in Ord$ is $\mathbb{V}_\xi$ een verzameling in HST. Bovendien is $\mathbb{WF} = \bigcup_{\xi \in Ord} \mathbb{V}_\xi$.*

Bewijs. Wegens Stelling 1.3.11 bevat de verzameling Ord van ordinalen in HST dezelfde (ZFC-)eigenschappen als ordinalen in ZFC, zodat we gebruik kunnen maken van transfiniete inductie (zie Bijlage D). Door middel van deze inductie tonen we aan dat alle $\mathbb{V}_\xi \in \mathbb{WF}$. Kies een willekeurig ordinaalgetal ξ zodanig dat $\mathbb{V}_\eta \in \mathbb{WF}$ voor alle $\eta < \xi$. We wensen aan te tonen dat $\mathbb{V}_\xi \in \mathbb{WF}$.
Indien $\xi = 0$, dan is $\mathbb{V}_\xi = \emptyset \in \mathbb{WF}$. Indien $\xi = \lambda + 1$, dan is $\mathbb{V}_\xi = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\lambda) \in \mathbb{WF}$ wegens de inductiehypothese. Indien ξ een limietordinaal is, dan is $\mathbb{V}_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \mathbb{V}_\eta$. Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is en $\xi \in \mathbb{WF}$, volgt uit de inductiehypothese dat $\mathbb{V}_\xi \in \mathbb{WF}$.

Omdat de unie en machtsverzameling van elementen van $\mathbb{WF}$, bekeken ten opzichte van de klasse $\mathbb{WF}$, gelijk zijn aan de unie en machtsverzameling van die elementen ten opzichte van $\mathbb{H}$, volgt dat $(\mathbb{V}_\xi)_{\xi \in \mathrm{Ord}}$ de Von Neumann hiërarchie is van het ZFC-universum $\mathbb{WF}$. Hieruit volgt dat $\mathbb{WF} = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi$ □

HST bevat het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$, zodat men kan denken dat $\mathbb{H} = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi$ indien we $\mathbb{V}_0 = \mathbb{I}$ nemen. Aangezien HST het Machtsverzamelingsaxioma niet bevat, moeten we dit beter funderen.

1.3.23 Definitie. De rang over $\mathbb{I}$ van een verzameling x is het ordinaalgetal $irk_{\mathbb{I}}(x)$ dat als volgt wordt gedefinieerd: $irk_{\mathbb{I}}(x) = 0$ als $x \in \mathbb{I}$ en $irk_{\mathbb{I}}(x) = (sup_{y \in x} irk_{\mathbb{I}}(y)) + 1$ voor $y \in \mathbb{H} \backslash \mathbb{I}$.

Voor een verzameling $x \subseteq \mathbb{I}$ die niet tot $\mathbb{I}$ behoort is $irk_{\mathbb{I}}(x) = \left(\sup_{y \in x} irk_{\mathbb{I}}(y)\right) + 1 = (\sup\{irk_{\mathbb{I}}(y) \mid y \in x\}) + 1 = (\sup\{0 \mid y \in x\}) + 1 = 0 + 1 = 1$. We wensen aan te tonen dat deze definitie zinvol is. Daarvoor hebben we nodig dat $\in/(\mathbb{H}\backslash\mathbb{I})$ goed-gefundeerd is.

1.3.24 Hulpstelling. *De relatie $\in/(\mathbb{H}\backslash\mathbb{I})$ is goed-gefundeerd over $\mathbb{H}\backslash\mathbb{I}$.*

Bewijs. Zij X een deelverzameling van $\mathbb{H}\backslash\mathbb{I}$. We wensen aan te tonen dat X een $\in/(\mathbb{H}\backslash\mathbb{I})$-minimaal element bevat. Uit het axioma Regulariteit over $\mathbb{I}$ volgt dat er een element x van X bestaat zodat $x \cap X \subseteq \mathbb{I}$. Omdat X geen interne elementen bevat, is $x \cap X = \emptyset$.
We tonen nu aan dat x een $\in/(\mathbb{H}\backslash\mathbb{I})$-minimaal element van X is. Stel namelijk dat x geen $\in/(\mathbb{H}\backslash\mathbb{I})$-minimaal element is van X. Dan bestaat er een element $b \in X \cap x$, een tegenstrijdigheid. □

1.3.25 Stelling. *Definite 1.3.23 is zinvol.*

Bewijs. Definieer de volgende functie

$$\begin{aligned} G(x,y) = z \quad &\Leftrightarrow \quad ((x,y),z) \in G \\ &\Leftrightarrow \quad [\text{‘}y \textbf{ is functie}\text{’} \wedge \exists u(z = \sup(u) + 1 \wedge \text{‘}u \textbf{ is beeld van } y\text{’} \wedge u \subseteq Ord)] \\ &\vee \quad [\text{‘}y \textbf{ is geen functie}\text{’} \wedge z = \emptyset] \end{aligned}$$

waarbij

$$
\begin{aligned}
\textbf{`}y\textbf{ is functie'} &\equiv \forall u \forall v \forall w(((u,v) \in y \wedge (u,w) \in y) \rightarrow v = w) \\
&\wedge \ \forall a(a \in y \rightarrow \exists b \exists c(a = (b,c))), \\
\textbf{`}u\textbf{ is beeld van }y\textbf{'} &\equiv \forall v(v \in u \leftrightarrow \exists w((w,v) \in y)), \\
z = \sup(u) + 1 &\equiv z = \sup(u) \cup \{\sup(u)\}, \\
U = \sup(u) &\equiv U \textbf{ is kleinste bovengrens van } u \\
&\equiv \forall v(v \in u \rightarrow v \in U \vee v = U) \\
&\wedge \ \forall w((\forall v(v \in u \rightarrow v \in w \vee v = w)) \rightarrow \neg(w \in U)).
\end{aligned}
$$

Omdat u een deelverzameling is van Ord, bestaat het supremum van u: de ordinalen in $\mathbb{H}$ bevatten dezelfde eigenschappen als ordinalen in ZFC. Merk op dat met 'y is functie' een verzameling in $\mathbb{H}$ wordt bedoeld, omdat y een variabele is in $\mathbb{H}$. Omdat $\in/(\mathbb{H}\backslash\mathbb{I})$ een goed-gefundeerde relatie is op $\mathbb{H}\backslash\mathbb{I}$ volgt uit de stelling Goed-gefundeerde Recursie dat er een unieke functie F bestaat zodat voor alle $x \in \mathbb{H}\backslash\mathbb{I}$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= G(x, F/(\{y \notin \mathbb{I} \mid y \in x\})) \\
&= \sup(\{F(y) \mid y \in x,\ y \notin \mathbb{I}\}) + 1.
\end{aligned}
$$

(Merk op dat F niet noodzakelijk een verzameling is in $\mathbb{H}$, maar er bestaat wel een formule die uitdrukt dat $F(x) = y$.) Voor een niet-interne verzameling $x \subseteq \mathbb{I}$ geldt dat $F(x) = sup(\emptyset) + 1 = 1$. Definieer nu

$$
\begin{aligned}
H(x) &:= 0,\ x \in \mathbb{I} \\
H(x) &:= F(x),\ x \notin \mathbb{I}.
\end{aligned}
$$

Uit de definitie van F volgt dat $F(x) \geq 1$ voor alle $x \in \mathbb{H}\backslash\mathbb{I}$, zodat voor $x \notin \mathbb{I}$ geldt dat $\sup(\{F(y) \mid y \in x,\ y \notin \mathbb{I}\}) = \sup(\{H(y) \mid y \in x\})$ (zelfs indien $x \subseteq \mathbb{I}$, aangezien $\sup(\emptyset) = 0 = \sup(\{\emptyset\})$). We besluiten dat

$$
\begin{aligned}
H(x) &:= 0,\ x \in \mathbb{I} \\
H(x) &:= \sup(\{H(y) \mid y \in x\}) + 1,\ x \notin \mathbb{I}.
\end{aligned}
$$

Omdat F uniek is, is ook H uniek. H en $irk_{\mathbb{I}}$ voldoen aan dezelfde voorwaarden van Definite 1.3.23, zodat men kan stellen dat $irk_{\mathbb{I}} = H$.[45] □

We geven nu de definitie van de Von Neumann hiërarchie. Omdat we ons niet willen beperken tot $\mathbb{I}$ alleen, geven we deze definitie voor willekeurige klassen U. We spreken ons niet uit over het bestaan van deze Von Neumann hiërarchie voor willekeurige klassen. We zullen wel aantonen dat deze definitie zinvol is voor $U = \mathbb{I}$.[46]

[45] In feite moeten we Definite 1.3.23 herschrijven als: 'definieer $irk_{\mathbb{I}}$ als H'.

[46] Voor willekeurige klassen U kan men proberen de Von Neumann hiërarchie $(\mathbb{V}_\xi[U])_{\xi \in \mathrm{Ord}}$ uit te drukken met een formule ϕ.

1.3.26 Definitie. Stel $U \subseteq \mathbb{I}$ is een (st-$\in$-definieerbare) verzameling of klasse. Definieer

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_0[U] &= U,\\ \mathbb{V}_{\xi+1}[U] &= U \cup \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi[U]),\\ \mathbb{V}_\lambda[U] &= \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi[U].\end{aligned}$$

Dit stelt de Von Neumann hiërarchie voor over U. Het is niet meteen duidelijk of elke $\mathbb{V}_\xi[U]$ een klasse is. Daarom beschouwen we ze voorlopig als formele collecties.[47]
We wensen aan te tonen dat de formele collecties $(\mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}])_{\xi\in\mathrm{Ord}}$ kunnen uitgedrukt worden door middel van de formule $irk_\mathbb{I}$. We zullen aantonen dat $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$ als en slechts als $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$. Omdat we in feite nog niet zeker weten of $\mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$ wel klassen zijn in $\mathbb{H}$, zullen we dit stilzwijgend aannemen.[48]
Om formeel correct te zijn kan men eigenlijk per definitie zeggen dat $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$ als en slechts als $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$. Uit de formule $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$ ontstaan dan de klassen $\mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$.

Allereerst wensen we aan te tonen dat $(\mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}])_{\xi\in\mathrm{Ord}}$ een $\subseteq$-stijgende keten is. We zullen dit aantonen voor willekeurige klassen U.[49]

1.3.27 Stelling. *Voor elke $x \in \mathbb{V}_\xi[U]$ met $x \notin U$ geldt dat $x \subseteq \mathbb{V}_\xi[U]$.*

Bewijs. We tonen dit aan door middel van transfiniete inductie op ξ. Zij x een verzameling zodat $x \in \mathbb{V}_\xi[U] \backslash U$. Indien $\xi = 0$, dan kan zo'n x niet bestaan. Indien $\xi = 1$, dan moet x een deelverzameling van $\mathbb{V}_0[U]$ zijn, zodat $x \subseteq U \subseteq \mathbb{V}_1$.
Zij ξ een opvolgersordinaal van λ, met andere woorden $\xi = \lambda + 1$ en stel dat de stelling geldt voor λ. Uit de definitie van $V_\xi[U]$ volgt dat $x \subseteq \mathbb{V}_\lambda[U]$. Voor elke $y \in x\backslash U$ volgt uit de inductiehypothese dat $y \subseteq \mathbb{V}_\lambda[U]$, zodat $y \in \mathbb{V}_\xi[U]$. Voor elke $y \in x \cap U$ volgt uit de definitie van $\mathbb{V}_{\lambda+1}[U]$ dat $y \in \mathbb{V}_{\lambda+1}[U] = \mathbb{V}_\xi[U]$. We kunnen besluiten dat $x \subseteq \mathbb{V}_\xi[U]$.
Zij ξ een limietordinaal. Indien $x \in \mathbb{V}_\xi[U]$, dan is $x \in \mathbb{V}_\eta[U]$ voor een zekere $\eta < \xi$. Uit de inductiehypthese volgt dat $x \subseteq \mathbb{V}_\eta[U]$, zodat $x \subseteq \mathbb{V}_\xi[U]$. □

1.3.28 Gevolg. *Elke verzameling x die tot $\mathbb{V}_\xi[U]$ behoort, behoort ook tot $\mathbb{V}_{\xi+1}[U]$.*

1.3.29 Gevolg. *Voor elke twee ordinalen η en ξ met $\eta < \xi$ geldt dat, indien x een verzameling is die tot $\mathbb{V}_\eta[U]$ behoort, x tot $\mathbb{V}_\xi[U]$ behoort.*

Bewijs. We tonen dit aan door middel van transfiniete inductie op ξ. Indien $\xi = 0$, dan is dit triviaal. Voor $\xi = 1$ volgt dit uit Gevolg 1.3.28. Zij dus $\xi > 1$ en stel dat de stelling geldt voor alle ordinalen strikt kleiner dan ξ.
Zij ξ een opvolgersordinaal van λ, met andere woorden $\xi = \lambda + 1$. Stel x is een verzameling dat tot $\mathbb{V}_\eta[U]$ behoort met $\eta < \xi$. Dan is $\eta \leq \lambda$, zodat uit de inductiehypothese volgt dat

[47] Dus metawiskundig bekeken.
[48] Of men kan metawiskundig werken met de collecties $\mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$.
[49] We werken hier met collecties en moeten dus in feite metawiskundig werken. Indien we de definitie van $\mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$ nemen met de $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$, dan zijn deze stellingen triviaal.

$x \in \mathbb{V}_\lambda[U]$. Uit Gevolg 1.3.28 volgt dat $x \in \mathbb{V}_{\lambda+1}[U] = \mathbb{V}_\xi[U]$.
Zij ξ een limietordinaal. Stel x is een verzameling dat tot $\mathbb{V}_\eta[U]$ behoort met $\eta < \xi$. Uit de definitie van $\mathbb{V}_\xi[U]$ volgt dat $x \in \mathbb{V}_\xi[U]$. $\square$

$(\mathbb{V}_\xi[U])_{\xi\in\mathrm{Ord}}$ is dus min of meer een transitieve sluiting op de klasse U, alhoewel de klasse U niet transitief hoeft te zijn. Nu kunnen we aantonen dat '$x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$' volgens Definitie 1.3.26 en '$irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$' overeen komen.

1.3.30 Stelling. *Zij $x \in \mathbb{H}$. Dan is $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$ als en slechts als $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$.*

Bewijs. We tonen dit aan door middel van transfiniete inductie op ξ. Zij $\xi = 0$. Dan is $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}] \Leftrightarrow x \in \mathbb{I} \Leftrightarrow irk_\mathbb{I}(x) = 0$. We mogen dus stellen dat $\xi > 0$.
Indien ξ een opvolgersordinaal is, dan is $\xi = \lambda + 1$. Stel dat $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$. Dan is ofwel $x \in \mathbb{I}$ ofwel $x \subseteq \mathbb{V}_\lambda[\mathbb{I}]$. In het eerste geval is $irk_\mathbb{I}(x) = 0 \leq \xi$. In het tweede geval volgt uit de inductiehypothese dat voor elke $y \in x$ geldt dat $irk_\mathbb{I}(y) \leq \lambda$. Hieruit volgt dat $irk_\mathbb{I}(x) = (\sup_{y\in x} irk_\mathbb{I}(y)) + 1 \leq \lambda + 1 = \xi$.
Omgekeerd, stel dat $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$. Dan is $(\sup_{y\in x} irk_\mathbb{I}(y)) + 1 \leq \lambda + 1$, zodat voor elke $y \in x$ geldt dat $irk_\mathbb{I}(y) \leq \lambda$. Uit de inductiehypothese volgt dan dat $y \in \mathbb{V}_\lambda[\mathbb{I}]$, zodat $x \subseteq \mathbb{V}_\lambda[\mathbb{I}]$. We besluiten dat $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$.
Stel nu dat ξ een limietordinaal is. Indien $x \in \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$, dan bestaat er een $\eta < \xi$ zodanig dat $x \in \mathbb{V}_\eta[\mathbb{I}]$. Uit de inductiehypothese volgt dan dat $irk_\mathbb{I}(x) \leq \eta < \xi$.
Omgekeerd, stel dat $irk_\mathbb{I}(x) \leq \xi$. Dan is $A = (\sup_{y\in x} irk_\mathbb{I}(y)) < \xi$. A is een supremum van ordinalen en dus zelf ook een ordinaal, zodat $irk_\mathbb{I}(y) \leq A < \xi$ voor elke $y \in x$. Uit de inductiehypothese halen we dat $y \in \mathbb{V}_A[\mathbb{I}]$, zodat $x \subseteq \mathbb{V}_A[\mathbb{I}]$. We besluiten dat $x \in \mathbb{V}_A[\mathbb{I}] \subseteq \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$. $\square$

1.3.31 Definitie. Definieer $\mathbb{WF}[\mathbb{I}] = \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi[\mathbb{I}]$. We noemen dit de klasse van alle verzamelingen goed-gefundeerd over $\mathbb{I}$.

1.3.32 Stelling. $\mathbb{H} = \mathbb{WF}[\mathbb{I}]$.

Bewijs. Trivialerwijs is $\mathbb{WF}[\mathbb{I}] \subseteq \mathbb{H}$, zodat we enkel nog de omgekeerde inclusie moeten aantonen. Voor elke $x \in \mathbb{H}$ heeft $irk_\mathbb{I}(x)$ een zekere waarde in Ord, zodat uit Stelling 1.3.30 volgt dat $x \in \mathbb{WF}[\mathbb{I}]$. $\square$

Voor het universum $\mathbb{H}$ van HST bestaat er dus een soort Von Neumann hiërarchie beginnend bij de klasse van interne verzamelingen.

1.3.4 De $\in$-definieerbaarheid van $\mathbb{I}$

De aanwezigheid van een niet-$\in$-definieerbare notie van standaard (st) is iets dat een niet-standaard verzamelingentheorie onderscheidt van andere formele systemen. De theorie HST organiseert echter het universum van verzamelingen $\mathbb{H}$ in een zekere zin zodat enkele typische niet-standaard fenomenen een $\in$-interpretatie hebben. Bijvoorbeeld is de klasse $\mathbb{I}$ $\in$-definieerbaar.

1.3.33 Definitie. Een verzameling x wordt *quasi-intern* genoemd indien er een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestaat zodat $x \in x_{n+1} \in x_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

1.3.34 Stelling. *De klasse van de interne verzamelingen en de klasse van de quasi-interne verzamelingen zijn gelijk.*

Bewijs. Stel dat x een quasi-interne verzameling is en bekijk de verzameling

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Uit het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$ volgt dat er minstens één x_n bestaat die een interne verzameling is. Omdat $\mathbb{I}$ transitief is en $x \in x_{n+1} \in x_n$ is x zelf intern.

Zij x een interne verzameling. Definieer de volgende rij in het ZFC-universum $\mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_{k+1} &:= y_k \cup \{y_k\},\ k \in {}^*\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Kies een willekeurige $\eta \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ en definieer $x_n := y_{\eta-n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Men kan aantonen dat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ goed gedefinieerd is in HST door toepassing van het Collectie- en Separatie-axioma[50]. Hieruit volgt dat x quasi-intern is. □

Er bestaat ook een andere $\in$-karakterisatie van $\mathbb{I}$, die op de vorige lijkt. We geven geen bewijs van deze karakterisatie.

1.3.35 Stelling. *Een verzameling x is intern als en slechts als er een verzameling y bestaat zodat het 'interval' $I_{xy} = \{z \mid x \in z \in y\}$ lineair geordend is, maar niet goed-geordend volgens $\in$.*

Bewijs. Voor een bewijs, zie [8]. □

Een gevolg van deze $\in$-karaterisaties van $\mathbb{I}$ is dat bijvoorbeeld het axioma Saturatie een $\in$-formulering heeft in $\mathbb{H}$. (Later zullen we namelijk zien dat beweren dat een verzameling x van standaard grootte is, equivalent is met beweren dat x bijectief is met een kardinaalgetal.) Men kan HST gaan $\in$-benaderen. Het is echter een onbewezen vermoeden dat HST niet volledig kan omgezet worden in een $\in$-theorie.

1.3.5 Verzamelingen van standaard grootte en Saturatie

In deze paragraaf tonen we een meer bekende vorm van saturatie aan. We hebben echter een equivalente karakterisering voor verzamelingen van standaard grootte nodig. Dit wordt geleverd door de volgende stelling. Bovendien is deze stelling belangrijk voor allerlei andere stellingen. De stelling gebruikt een equivalente vorm van het Keuze-axioma in ZFC, namelijk de Goede-Ordeningsstelling die zegt dat elke verzameling (in een ZFC-universum) goed-geordend kan worden. De theorie HST bevat het Standaard grootte Keuze-axioma en men kan bewijzen in HST dat de *enige* verzamelingen die goed-geordend kunnen worden, verzamelingen van standaard grootte zijn. Eerst een herhaling van de definitie.

[50] We doen dit nu niet, aangezien dit zoals altijd hetzelfde is.

1.3.36 Definitie. Een verzameling wordt een verzameling van standaard grootte genoemd als het van vorm $\{f(x) \mid x \in X \cap \mathbb{S}\}$ is met X een verzameling en f een functie met $X \cap \mathbb{S} \subseteq \mathrm{dom} f$. (Door het axioma Standardisatie kunnen we zelfs aannemen dat X standaard is.)[51]

Om een equivalente karakterisering voor verzamelingen van standaard grootte te formuleren, hebben we eerst enkele definities en een hulpstelling nodig.

1.3.37 Definitie. Zij $(L, \prec)$ een goede ordening (L kan een klasse zijn). Een beginsegment van L is een verzameling of klasse B zodanig dat voor alle $x \in B$ en voor alle $y \in L$ geldt dat als $y \prec x$, dat dan $y \in B$.

1.3.38 Definitie. Een orde-isomorfisme tussen twee goede ordeningen $(L, \prec_L)$ en $(M, \prec_M)$ is een bijectieve afbeelding f zodanig dat $l_1 \prec_L l_2$ als en slechts als $f(l_1) \prec_M f(l_2)$ voor alle $l_1, l_2 \in L$.

1.3.39 Definitie. Een orde-inbedding $f : L \to M$ tussen twee goede ordeningen $(L, \prec_L)$ en $(M, \prec_M)$ is een orde-isomorfisme tussen L en een beginsegment van M.

1.3.40 Hulpstelling. *Zij $(L, \prec_L)$ en $(M, \prec_M)$ twee goede ordeningen. Dan bestaat er een orde-inbedding van L in M of een orde-inbedding van M in L.*

Bewijs. Zij a een element dat niet voorkomt in L en M en definieer $M' = M \cup \{a\}$. Definieer de klassefunctie $G(x, y)$ als volgt. Indien y geen functie is, definieer $G(x, y) = \emptyset$. Indien y wel een functie is, definieer $G(x, y)$ als het $\prec_M$-minimum van de verzameling $M \backslash (M \cap u)$, waarbij u het beeld is van de functie y, indien de verzameling $M \backslash (M \cap u)$ niet ledig is. Indien $M \backslash (M \cap u)$ wel ledig is, definieer dan $G(x, y)$ als a. Omdat $(L, \prec_L)$ goed-gefundeerd is, volgt uit Goed-gefundeerde Recursie dat er een unieke functie F bestaat zodanig dat voor alle $l \in L$ geldt

$$F(l) = G(l, F/\{x \in L \mid x \prec_L l\}).$$

Uit de constructie volgt dat F een afbeelding is van L naar M'. Er zijn twee mogelijkheden. Ofwel is $F(l) \neq a$ voor alle $l \in L$, ofwel bestaat er een $l_0 \in L$ zodat $F(l_0) = a$ en $F(l) \neq a$ voor alle $l \prec_L l_0$. Zij ten eerste $F(l) \neq a$ voor alle $l \in L$. Dan is

$$F(x) = min_{\prec_M}(M \backslash (M \cap \{F(y) \mid y \prec_L x\}))$$

en $M \backslash (M \cap \{F(y) \mid y \prec_L x\}) \neq \emptyset$ voor alle $x \in L$. F is een injectieve orde-bewarende afbeelding van L naar M. Kies namelijk twee willekeurige elementen $x \prec_L y$ in L. Het kan niet zijn dat $F(y) \prec_M F(x)$, aangezien dit een tegenstrijdigheid zou opleveren met de constructie van $F(x)$. Indien $F(y) = F(x)$, dan zou dit een tegenstrijdigheid opleveren met de constructie van $F(y)$. We besluiten dat $F(x) \prec_M F(y)$, zodat F orde-bewarend is. Hieruit volgt direct dat F injectief is: indien $F(x) = F(y)$, dan kan het niet zijn dat

[51] Merk op dat we mogen aannemen dat f een klassefunctie is, aangezien de restrictie van de klassefunctie f tot een verzameling X zeker een verzamelingsfunctie is, zoals eerder opgemerkt.

$x \neq y$, aangezien dit een tegenstrijdigheid zou opleveren met het feit dat F orde-bewarend is. Ook is het beeld van F een beginsegment van $(M, \prec_M)$: kies namelijk een willekeurige $m_1 \in M$ zodat $m_1 \prec_M m_2$ en $m_2 \in M$ een element dat in het beeld zit van F. Er bestaat dan een $x \in L$ zodat $F(x) = m_2$. Indien m_1 niet in het beeld zou zitten van F, dan zou dit een tegenstrijdigheid opleveren met de constructie van $F(x)$. We besluiten dat F een orde-bewarende injectieve afbeelding is van L naar een beginsegment van M.
Het tweede geval kan op volledig analoge wijze behandeld worden. We weten dat er een $l_0 \in L$ bestaat zodat $F(l_0) = a$ en $F(l) \neq a$ voor alle $l \prec_L l_0$. Net zoals in het eerste geval kan men aantonen dat F een orde-bewarende surjectieve afbeelding is van $\{l \in L \mid l \prec_L l_0\}$ naar M. De inverse afbeelding levert dat een orde-inbedding op van M in L. □

1.3.41 Stelling. *Stel x is een verzameling. Dan zijn volgende uitspraken equivalent.*

1. *x is een verzameling van standaard grootte.*

2. *x staat in bijectief verband met een kardinaal κ.*

3. *x kan goed-geordend worden.*

Bovendien zijn elke verzameling in $\mathbb{WF}$ en elke verzameling $X \subseteq \mathbb{S}$ verzamelingen van standaard grootte.

Bewijs. Indien $Y \in \mathbb{WF}$, dan is door de definitie van *, $^*Y \cap \mathbb{S}$ gelijk aan $\{^*y \mid y \in Y\}$. Neem in de definitie van een verzameling van standaard grootte f als $\hat{}$ (=de inverse van *) en X als $^*Y$. Hieruit verkrijgen we dat Y een verzameling is van standaard grootte. Indien $X \subseteq \mathbb{S}$, dan nemen we in de definitie van een verzameling van standaard grootte f als de identieke afbeelding en X als X. We besluiten dat ook X een verzameling is van standaard grootte.

(1.) $\Rightarrow$ (2.): Stel dat $x = \{f(y) \mid y \in X \cap \mathbb{S}\}$. Door het axioma Standardisatie mogen we aannemen dat X standaard is. Omdat * een $\in$-isomorfisme is tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{S}$, bestaat er een $U \in \mathbb{WF}$ waarvoor $X = {}^*U$, zodat

$$X \cap \mathbb{S} = {}^*U \cap \mathbb{S} = \{^*u \mid u \in U\}.$$

Definieer $g(u) = f(^*u)$ voor willekeurige $u \in U$, zodat g een surjectieve functie is van U naar x.[52]
We weten dat $U \in \mathbb{WF}$ en dat $\mathbb{WF}$ een interpretatie is van ZFC in HST, zodat uit de Goede-Ordeningsstelling van ZFC volgt dat er een goede ordening $\prec$ bestaat op U. Deze ordening is een ordening in het universum $\mathbb{WF}$, maar ook een goede ordening in het universum $\mathbb{H}$, omdat elke niet-ledige $\mathbb{H}$-deelverzameling van U ook een element is van $\mathbb{WF}$, met andere woorden een $\mathbb{WF}$-deelverzameling[53]. Definieer

$$W := \{w \in U \mid g(w) \neq g(u) \text{ voor alle } u \prec w\}.$$

[52] We kunnen g zeker definiëren als een klassefunctie, maar aangezien we ons beperken tot de verzameling U kan men aantonen dat uit het Vervangingsaxioma volgt dat g een verzamelingsfunctie is.
[53] Omdat $\mathbb{WF}$ $\subseteq$-compleet is.

Omdat U goed-geordend is door $\prec$, is g/W een bijectie van W naar x. Omdat $U \in \mathbb{WF}$ en $W \subseteq U$, is $W \in \mathbb{WF}$ (omdat $\mathbb{WF}$ $\subseteq$-compleet is). Daardoor heeft W een kardinaalgetal κ, zodat x in bijectief verband staat met κ.

(2.) $\Rightarrow$ (3.): Stel dat x een willekeurige verzameling is die aan (2.) voldoet. Er bestaat een bijectie f van x naar een kardinaalgetal κ. κ is goed-geordend door middel van $\in$. Stel x_0, x_1 zijn twee elementen uit x, en definieer

$$x_0 \prec x_1 \leftrightarrow f(x_0) \in f(x_1).$$

x is goed-geordend door middel van $\prec$. Omdat f een functie is die x afbeeldt op een kardinaalgetal κ, is $\prec$ zeker een lineaire ordening. Kies nu een niet-ledige deelverzameling Y van x. We wensen aan te tonen dat er een $\prec$-minimaal element van Y bestaat. $f(Y)$ is een niet-ledige deelverzameling van κ en heeft dus een $\in$-minimaal element a. Uit de definitie van $\prec$ volgt dat $f^{-1}(a)$ een $\prec$-minimaal element is van Y.

(3.) $\Rightarrow$ (1.): Stel dat er een goede ordening $\prec$ bestaat op x. Omdat Ord goed-geordend is door $\in$, volgt uit Hulpstelling 1.3.40 dat er orde-inbedding bestaat van Ord naar een beginsegment van x of dat er een orde-inbedding bestaat van x naar een beginsegment van Ord. In het eerste geval zou uit het axioma Vervanging, met de inverse afbeelding, volgen dat Ord een verzameling is, een tegenstrijdigheid. In het tweede geval hebben we een orde-bewarende afbeelding f van x naar een beginsegment van Ord. Dit is een *echt* beginsegment[54], anders zou uit het axioma Vervanging volgen dat Ord een verzameling is, een tegenstrijdigheid. Stel α is het $\in$-kleinste ordinaal dat niet in het beeld van f onder x zit. Dan is f een orde-bewarende bijectie tussen x en $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\} \in \mathbb{WF}$. (In feite hebben we nu (2.) aangetoond.) x is dus het beeld van een verzameling van standaard grootte onder de functie f^{-1} en is dus ook een verzameling van standaard grootte. Stel namelijk dat $\alpha = \{g(y) \mid y \in Y \cap \mathbb{S}\}$ voor een functie g en een verzameling Y. Dan is $x = \{f^{-1}(g(y)) \mid y \in Y \cap \mathbb{S}\}$. □

We merken op dat we bij dit bewijs in HST geen gebruik maken van het Standaard grootte Keuze-axioma. Aangezien in ZFC de Goede-Ordeningsstelling equivalent is met het Keuze-axioma, zou men kunnen denken dat men in HST uit 'elke verzameling van standaard grootte kan goed-geordend worden' het Standaard grootte Keuze-axioma kan afleiden, zonder gebruik te maken van het Standaard grootte Keuze-axioma zelf. Dit is echter niet waar, aangezien het Standaard grootte Keuze-axioma sterker is dan de stelling die zegt dat elke verzameling van standaard grootte goed-geordend kan worden. Uit het Standaard grootte Keuze-axioma volgt namelijk (zie Stelling 1.1.22) dat er voor elke surjectieve functie $f : X \to Y$ met Y een verzameling van standaard grootte een keuzefunctie bestaat, terwijl men uit de stelling die zegt dat elke verzameling van standaard grootte goed-geordend kan worden enkel kan halen dat dit geldt voor surjectieve functies $f : X \to Y$ met X een verzameling van standaard grootte (dan is Y ook een verzameling

[54] Een echt beginsegment van Ord is een beginsegment van Ord dat niet volledig Ord is.

van standaard grootte, wegens Gevolg 1.3.42).

Een interessante vraag is of er wel degelijk verzamelingen bestaan die niet van standaard grootte zijn. Hierop kunnen we positief antwoorden, zoals later zal volgen uit Hulpstelling 1.4.1.

Uit de vorig stelling volgt dat men enkel een kardinaalgetal kan hechten aan een verzameling x van standaard grootte. Dit getal wordt de kardinaliteit van die verzameling x genoemd en wordt genoteerd als Kard x. Indien y geen verzameling is van standaard grootte, dan heeft y geen kardinaalgetal. Omdat $\mathbb{WF}$ transitief en $\subseteq$-compleet is, zal de bijectie b van een verzameling $x \in \mathbb{WF}$ naar een kardinaalgetal κ een element zijn van $\mathbb{WF}$. Hieruit volgt dat ${}^*b$ een interne bijectie is van de interne verzameling ${}^*x$ naar ${}^*\kappa$. Met andere woorden ${}^*\mathrm{Kard}({}^*x) = {}^*\kappa$, met *Kard de kardinaliteit in de zin van $\mathbb{I}$. Het probleem is dat ${}^*\kappa$ geen kardinaalgetal is in de zin van $\mathbb{H}$. De volgende stelling is een gevolg van Stelling 1.3.41 en is nodig in de 'nieuwe' versie van saturatie[55].

1.3.42 Gevolg.

1. *Een deelverzameling van een verzameling van standaard grootte is van standaard grootte. Ook zijn verzamelingen van standaard grootte gesloten onder eindige doorsnedes. Dit wil zeggen dat voor een eindig aantal verzamelingen $x_1, \ldots, x_k$ van standaard grootte, de verzameling $x_1 \cap \cdots \cap x_k$ van standaard grootte is. (Merk op dat we hier werken met de notatie $\cap$ in plaats van $\bigcap$.)*

2. *Het beeld van een verzameling van standaard grootte onder een functie is een verzameling van standaard grootte.*

3. *De verzamelingen van standaard grootte zijn gesloten onder cartesisch product en machtsverzameling. Bovendien is voor verzamelingen X en Y van standaard grootte de verzameling $\mathcal{F}(Y, X)$ een verzameling van standaard grootte.*

4. *Verzamelingen van standaard grootte zijn gesloten onder standaard grote unie.*

Bewijs. (1.) Stel X is een verzameling van standaard grootte. Uit Stelling 1.3.41 halen we dat er een bijectie bestaat tussen X en een kardinaalgetal $\kappa \in \mathbb{WF}$. Een deelverzameling van X staat dan in bijectief verband met een deelverzameling van κ. Een deelverzameling van κ is, wegens de $\subseteq$-geslotenheid van $\mathbb{WF}$ ook een element van $\mathbb{WF}$ en dus ook een verzameling van standaard grootte. Er bestaat een kardinaalgetal κ' dat bijectief is met de deelverzameling van κ en dus ook bijectief is met de deelverzameling van X. We kunnen besluiten dat een deelverzameling van een verzameling van standaard grootte ook een verzameling is van standaard grootte.
Hieruit volgt dat de doorsnede van verzamelingen van standaard grootte ook een verzameling is van standaard grootte, omdat de doorsnede van verzamelingen een deelverzameling

[55] Het bewijs van Gevolg 1.3.42 is zelf uitgewerkt.

is van die verzamelingen.

(2.) Stel X is een verzameling van standaard grootte en f een functie. We wensen aan te tonen dat $f(X) = Y$ een verzameling is van standaard grootte. Stel κ is het kardinaalgetal dat bijectief is met X volgens de functie $g : \kappa \to X$. Dan is $Y = \{f(g(a)) \mid a \in \kappa\}$, zodat Y het beeld is van een verzameling κ uit $\mathbb{WF}$. We mogen dus stellen dat $Y = \{f(x) \mid x \in X\}$ met $X \in \mathbb{WF}$. Definieer nu $g(s) = f(\hat{s})$ voor elke $s \in \{{}^*x \mid x \in X\}$. Dan is $Y = \{g(s) \mid s \in {}^*X \cap \mathbb{S}\}$ en dus is Y een verzameling van standaard grootte.

(3.) We weten dat $\mathbb{WF}$ gesloten is onder de bewerkingen machtsverzameling, cartesisch product en $\mathcal{F}(Y, X)$, wegens Stelling 1.3.3, zodat als de startverzameling(en) in $\mathbb{WF}$ zitten, het gestelde al bewezen is. Stel nu dat X en Y verzamelingen zijn van standaard grootte. Dan bestaan er kardinaalgetallen $\kappa_0, \kappa_1 \in \mathbb{WF}$ dat bijectief in verband staan met X, respectievelijk Y. Door het axioma Vervanging kan men dan besluiten dat $\mathcal{P}(\kappa_0) \in \mathbb{WF}$ bijectief in verband staat met $\mathcal{P}(X)$. Analoog staat $X \times Y$ bijectief in verband met $\kappa_0 \times \kappa_1 \in \mathbb{WF}$ en $\mathcal{F}(Y, X)$ met $\mathcal{F}(\kappa_1, \kappa_0)$.

(4.) Stel X is een verzameling van standaard grootte, zo dat al zijn elementen verzamelingen zijn van standaard grootte. We moeten aantonen dat $\bigcup X$ een verzameling is van standaard grootte. Voor een element $x \in X$ definiëren we de verzameling

$$F(x) := \{(x, R) \in \{x\} \times \mathcal{P}(x \times x) \mid R \text{ is een goede ordening op } x\}.$$

Uit het vorige weten we al dat $\{x\} \times \mathcal{P}(x \times x)$ een verzameling is (van standaard grootte), zodat $F(x)$ goed gedefinieerd is door het axioma Separatie. Elke $F(x) \neq \emptyset$, omdat elk element x van X goed-geordend kan worden. Definieer $Y = \{F(x) \mid x \in X\}$. Y is een verzameling door het axioma Vervanging en het axioma Separatie. Bovendien is Y ook een verzameling van standaard grootte, zodat uit het Standaard grootte Keuze-axioma volgt er een functie f op X bestaat zodat $f(x) \in F(x)$. $f(x)$ induceert dan een goede ordening $\prec_{f(x)}$ op de verzameling x. Omdat X ook goed-geordend kan worden bestaat er een goede ordening $\prec$ op X. Definieer dan de volgende functie:

$$k(y) := \min\nolimits_{\prec} \{x \in X \mid y \in x\} \in X, \text{ voor elke } y \in \bigcup X.$$

Definieer nu de volgende goede ordening op $\bigcup X$: kies $y, z \in \bigcup X$ willekeurig en definieer $y \prec_0 z$ als en slechts als $k(y) \prec k(z)$ of $k(y) = k(z) = x$ en $y \prec_{f(x)} z$. $\prec_0$ is een lineaire ordening op $\bigcup X$ en is eveneens goed-gefundeerd. Kies namelijk een niet-ledige deelverzameling Z van $\bigcup X$. Dan is $k(Z) = \{k(z) \mid z \in Z\}$ een niet-ledige deelverzameling van X met $\prec$-minimaal element $x \in X$. Kies een willekeurige $a \in Z$. Dan is, door de definitie van x, $k(a) = x$ of $x \prec k(a)$. Bekijk nu de verzameling

$$\{a \in Z \mid k(a) = x\}.$$

Dit is een niet-ledige deelverzameling van x, zodat men een $\prec_{f(x)}$-minimaal element z eruit kan halen. Er geldt zeker dat $k(z) = x$. z is dan een $\prec_0$-minimaal element van Z. $\square$

We zullen zien dat het Machtsverzamelingsaxioma niet geldt in HST. Toch is de collectie van alle eindige deelverzamelingen van *elke* verzameling een verzameling in $\mathbb{H}$.

1.3.43 Definitie. $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ is de collectie van alle eindige deelverzamelingen van X.

1.3.44 Definitie. $X^{<\omega}$ is de collectie van alle eindige rijen van elementen van X. Een element van $X^{<\omega}$ is dus een k-tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ bestaande uit elementen van X, met $k \in \mathbb{N}$. Hierbij definiëren we een k-tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ als de verzameling $\{(1, x_1), \ldots, (k, x_k)\}$ (waarbij $(i, x_i) = \{i, \{i, x_i\}\}$). Dit is in feite niets anders dan een functie f met domein $\{1, \ldots, k\}$ waarbij $f(i) = x_i$. Dit definiëren we ook voor $k = 2$, zodat we twee notaties hebben voor (x, y). We mogen hier niet verwarren in notatie. Men kan echter aantonen dat beide definities van (x, y) equivalent zijn, zodat voor beide gevallen Stelling 1.1.11 geldt.

1.3.45 Stelling. *Voor elke verzameling X zijn $\mathcal{P}_{\mathit{fin}}(X)$ en $X^{<\omega}$ verzamelingen in $\mathbb{H}$.*

Bewijs. Door middel van inductie op $\mathbb{N}$ tonen we aan dat X^n een verzameling is in $\mathbb{H}$. Voor $n = 0, 1$ is dit triviaal. Voor $n > 1$ kan dit op analoge wijze afgeleid worden als in Stelling 1.1.11: zij gegeven dat X^k een verzameling is in $\mathbb{H}$ voor elke $k < n$. We wensen aan te tonen dat X^n een verzameling is. Kies een willekeurig $x \in X^{n-1}$ vast. (x is een functie van $\{1, \ldots, n-1\}$ naar X.) Definieer

$$\Phi(y, z) \equiv z = x \cup \{(n, y)\}.$$

Er bestaat zeker een z zodat $\Phi(y, z)$ waar is. We kunnen dus gebruik maken van het Collectie-axioma. Hieruit volgt dat er een verzameling A_x bestaat, zo dat voor alle $y \in X$ geldt dat $x \cup \{(n, y)\} \in A_x$. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dat $B_x = \{x \cup \{(n, y)\} \mid y \in X\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Ook is $\{B_x \mid x \in X^{n-1}\}$ een verzameling in $\mathbb{H}$: definieer

$$\begin{aligned}\Psi(x, z, X) &\equiv z = B_x \\ &\equiv \forall v(v \in z \leftrightarrow \exists y(v = x \cup \{(n, y)\} \wedge y \in X)).\end{aligned}$$

Omdat B_x een verzameling is, kunnen we gebruik maken van het Collectie-axioma. Hieruit volgt dat er een verzameling A bestaat, zo dat voor alle $x \in X^{n-1}$ geldt dat $B_x \in A$. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dan dat $B = \{B_x \mid x \in X^{n-1}\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Door het Unie-axioma is

$$\bigcup B = X^n$$

een verzameling in $\mathbb{H}$. Definieer nu

$$\begin{aligned}\Omega(n, z, X) &\equiv z = X^n \\ &\equiv \forall x(x \in z \leftrightarrow x \in X^n),\end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned} x \in X^n &\equiv \text{‘}x\ \textbf{is een functie met domein } \{1,\dots,n\}\ \textbf{naar } X\text{’} \\ &\equiv \forall w(w \in x \to \exists u \exists v(w = (u,v) \wedge v \in X \wedge 1 \le u \le n)) \\ &\wedge \forall u(1 \le u \le n \to \exists v((u,v) \in x)) \\ &\wedge \forall u \forall v \forall w((w,u) \in x \wedge (w,v) \in x \to u = v). \end{aligned}$$

Om $1 \le u \le n$ uit te drukken kunnen we het feit gebruiken dat een natuurlijk getal n gelijk is aan $\{0,\dots,n-1\}$. Omdat elke X^n een verzameling is in $\mathbb{H}$, kunnen we gebruik maken van het Collectie-axioma. Hieruit volgt dat een verzameling Y bestaat, zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $X^n \in Y$. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dat $\{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Uit het Unie-axioma besluiten we dat

$$X^{<\omega} = \bigcup \{X^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

een verzameling is in $\mathbb{H}$.

Definieer

$$\begin{aligned} \Upsilon(f,x) &\equiv x = range(f) \\ &\equiv \forall z(z \in x \leftrightarrow \exists y((y,z) \in f)) \end{aligned}$$

Merk op dat voor elke functie f in $X^{<\omega}$, $range(f)$ een verzameling is door toepassing van het Vervangingsaxioma. Door gebruik te maken van het Collectie-axioma met de formule Υ en de verzameling $X^{<\omega}$, verkrijgen we dat er een verzameling bestaat die $range(f)$ bevat als element voor elke $f \in X^{<\omega}$. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dat $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) = \{range(f) \mid f \in X^{<\omega}\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. □

Deze stelling kan voor verzamelingen $X \subseteq \mathbb{I}$ veralgemeend worden (zie Stelling 2.2.6). We hebben nu voldoende gereedschap om een nieuwe versie van saturatie te bewijzen. In plaats van families die $\cap$-gesloten zijn, zullen we nu spreken over families die voldoen aan de ‘eindige doorsnede eigenschap’.

1.3.46 Definitie. Een familie van verzamelingen X voldoet aan de **eindige doorsnede eigenschap**[56] als $\bigcap X' \neq \emptyset$ voor elke eindige $X' \subseteq X$.

1.3.47 Stelling (Saturatie). *Stel $X \subseteq \mathbb{I}$ is een verzameling van standaard grootte die voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap. Dan is $\bigcap X \neq \emptyset$*[57].

Bewijs. Definieer X' als de verzameling van alle eindige doorsnedes van elementen in X. Is X' wel degelijk een verzameling in HST? Zoja, is X' een verzameling van standaard grootte? Een element van X' ziet er uit als $x_1 \cap \cdots \cap x_k$ met $x_i \in X$ voor $i = 1,\dots,k$.

[56] afgekort in het Engels met f.i.p.

[57] Het bewijs is gebaseerd op een bewijs uit [9](, met een persoonlijke inbreng).

Uit Gevolg 1.3.42 halen we dat $\mathcal{P}(X)$ een verzameling van standaard grootte is, zodat ook $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ een verzameling is van standaard grootte. We hebben dat

$$X' = \left\{ \bigcap a \mid a \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(X) \right\},$$

zodat X' het beeld is van $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ onder de functie $f(x) = \bigcap x$. Merk op dat f een goed gedefinieerde functie is door middel van de volgende formule

$$y = f(x) \quad \equiv \quad \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow z \in u)).$$

Men kan aantonen dat X' een verzameling is door gebruik te maken van het Collectie-axioma op de formule $f(x) = y$ en de verzameling $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ en daarna het Separatie-axioma toe te passen. Bovendien is X' een verzameling van standaard grootte door Gevolg 1.3.42. Aangezien $X \subseteq \mathbb{I}$ en $\mathbb{I}$ gesloten is onder eindige doorsnedes wegens Stelling 1.3.3, is $X' \subseteq \mathbb{I}$. Op triviale wijze is X' $\cap$-gesloten en is elk element van X' niet-ledig omdat X voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap. Uit het axioma Saturatie volgt dat $\emptyset \neq \bigcap X' = \bigcap X$. $\square$

1.4 De paradox van Hrbaček

De paradox van Hrbaček zegt dat de axioma's Vervanging, Keuze[58], Machtsverzameling en Onbegrensde Saturatie incompatibel zijn in de st-$\in$-taal. In HST hebben we het axioma Vervanging aangenomen, zodat we de axioma's Keuze, Machtsverzameling en Saturatie moeten afzwakken tot bijvoorbeeld verzamelingen van standaard grootte.[59] We zullen nu aantonen dat de gewone versies van de axioma's niet gelden in HST, maar eerst een niet-triviale hulpstelling.

1.4.1 Hulpstelling.

1. *Elke interne verzameling van standaard grootte is eindig.*

2. *Elke eindige verzameling $X \subseteq \mathbb{S}$ is standaard, dus ook intern.*

3. *Elke eindige verzameling $X \subseteq \mathbb{I}$ is intern.*

4. *Elke interne verzameling $X \subseteq \mathbb{S}$ is eindig.*

Bewijs. (1.) Stel X is een oneindige, interne verzameling van standaard grootte. Beschouw de familie $Y = \{X \setminus \{x\} \mid x \in X\}$. Omdat $\mathbb{I}$ transitief is en X een verzameling van standaard grootte is, is $Y \subseteq \mathbb{I}$ en is Y een verzameling van standaard grootte. Omdat X

[58] Meer exact: de Goede-Ordeningsstelling.

[59] Partiële gesatureerde theorieën (zie Hoofdstuk 4) nemen zowel het Vervangings- als het Machtsverzamelingsaxioma aan. Dit is mogelijk, aangezien ze een bijkomende restrictie opleggen op de klasse van de interne verzamelingen, namelijk dat elke interne verzameling behoort tot een standaard verzameling van *-kardinaliteit $\leq \kappa$. Er is dus maar een beperkter universum voorhanden, waardoor de axioma's dan al direct verzwakt zijn.

oneindig is, voldoet Y aan de eindige doorsnede eigenschap. Uit Stelling 1.3.47 volgt dat $\bigcap Y \neq \emptyset$, wat onmogelijk is.

(2.) Stel X is een verzameling met $|X| = k$. Indien $k = 0$, dan is $X = \emptyset \in \mathbb{S}$. Indien $k = 1$, dan is $X = \{x\}$ met $x \in \mathbb{S}$. Uit Stelling 1.3.3 volgt dat $\{x\} = \{x, x\}$ een verzameling is van $\mathbb{S}$. De gelijkheid $\{x\} = \{x, x\}$ volgt uit het axioma Extensionaliteit van HST. Indien $k > 1$, dan bestaan er twee verzameling X_0, X_1 zodat $|X_0| = |X_1| = k - 1$ en $X = X_0 \cup X_1$. Zowel X_0 en X_1 zijn standaard verzameling wegens de inductiehypothese. Uit Stelling 1.3.3 volgt dat $X_0 \cup X_1 = X$ ook een standaard verzameling is.

(3.) Analoog aan (2.).

(4.) Omdat $X \subseteq \mathbb{S}$, is X een verzameling van standaard grootte. Uit (1.) volgt dat X eindig is. □

Uit dit bewijs volgt dat elke oneindige interne verzameling geen verzameling is van standaard grootte. Er bestaan dus wel degelijk verzamelingen die niet van standaard grootte zijn. Nu bewijzen we de paradox van Hrbaček[60].

1.4.2 Stelling (Hrbaček)**.** *Er bestaat een verzameling die geen machtsverzameling heeft en niet goed-geordend kan worden. Meer zelfs, we tonen aan dat dit geldt voor elke oneindige interne verzameling X. Bovendien bestaat er geen verzameling P die alle verzamelingen $Y \subseteq X$ van standaard grootte bevat, voor een oneindige interne verzameling X.*

Bewijs. Stel X is een oneindige[61] interne verzameling. Dan is X geen verzameling van standaard grootte, wegens Hulpstelling 1.4.1. Uit Stelling 1.3.41 volgt dat X niet goed-geordend kan worden.
Indien we kunnen aantonen dat er geen verzameling P bestaat die alle verzamelingen $Y \subseteq X$ van standaard grootte bevat, dan heeft X ook geen machtsverzameling. Stel nu dat er wel zo'n verzameling P bestaat. X is een interne verzameling en $\mathbb{I}$ is een ZFC-universum, zodat X ofwel $*$-eindig ofwel $*$-oneindig is. In het eerste geval bestaat er een $n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ zodat $|X| = n$, omdat X niet eindig is. In het tweede geval bestaat er een interne verzameling $X' \subseteq X$ met $|X'| = n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, omdat dit een uitspraak is in ZFC en $\mathbb{I}$ een ZFC-universum is. We besluiten dat in beide gevallen er een interne deelverzameling $X' \subseteq X$ bestaat met $|X'| = n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $X = X'$: dit verandert namelijk niets aan het feit dat er een verzameling P bestaat die alle deelverzamelingen van X van standaard grootte bevat.
Dus $X = X'$ en $|X| = |X'| = n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. We kunnen zelfs aannemen dat $X = \{0, \ldots, n-1\}$. Desnoods kunnen we een interne bijectie tussen X en $\{0, \ldots, n-1\}$ leggen. Indien er een verzameling P voor X zou bestaan die alle deelverzamelingen van standaard grootte van X bevat als element, dan zou er ook zo'n verzameling bestaan voor

[60] Het bewijs is gebaseerd op Stelling 1.3.9 uit [9](, met persoonlijke aanpassingen om het te verbeteren).
[61] Volgens Definitie 1.3.14.

$\{0, \ldots, n-1\}$.[62]

Dus $X = \{0, \ldots, n-1\}$. We tonen nu aan dat elk ordinaal α orde-bewarend ingebed kan worden in (een deelverzameling van) X. Kies een willekeurig ordinaal $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Definieer voor elke $x \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha)$ de verzameling F_x als

$$F_x := \{f : {}^*\alpha \to X \mid f \text{ intern, orde-bewarend op } {}^*x \subseteq {}^*\alpha\}.$$

F_x is een interne verzameling, omdat ${}^*x$ en ${}^*\alpha$ elementen zijn van $\mathbb{I}$ en $\mathbb{I}$ een ZFC-universum is.
Elke F_x is niet-ledig. We bewijzen namelijk door middel van inductie op $|x|$ dat er een interne functie $f \in F_x$ bestaat met $f({}^*\beta) \in \mathbb{N} \subseteq X$ voor elke $\beta \in x$ en die orde-bewarend op ${}^*x$. Indien $|x| = 0$ of 1, dan is dit triviaal. Indien $|x| = k+1$, kan men door de inductiehypothese voor $x \backslash \{x_0\}$ (met x_0 het $\in$-grootste element van x: x_0 bestaat, want x is eindig) een interne functie $f_0 \in F_{x\backslash\{x_0\}}$ vinden zodat voor alle $\beta \in x\backslash\{x_0\}$ geldt dat $f({}^*\beta) \in \mathbb{N}$ en zodat f_0 orde-bewarend is op ${}^*(x\backslash\{x_0\})$.
Omdat x eindig is, volgt uit Hulpstelling 1.4.1 dat $\{{}^*\beta \mid \beta \in x\}$ standaard is. We besluiten dat ${}^*x = {}^S\{{}^*\beta \mid \beta \in x\} = \{{}^*\beta \mid \beta \in x\}$, zodat ${}^*x$ eindig is. Bovendien is ${}^*(x\backslash\{x_0\}) = {}^*x\backslash\{{}^*x_0\}$ en is ${}^*x_0$ het $\in$-grootste element van ${}^*x$, wegens $*$-Overdracht. We definiëren een functie $f \in F_x$: definieer voor alle $y \in {}^*\alpha\backslash\{{}^*x_0\}$, $f(y)$ als $f_0(y)$ en

$$f({}^*x_0) := \max\{f({}^*\beta) \mid \beta \in x\backslash\{x_0\}\} + 1.$$

Op triviale wijze is f orde-bewarend op ${}^*x$ en is $f({}^*\beta) \in \mathbb{N}$ voor alle $\beta \in x$. Bovendien is f intern, aangezien men een functie kan beschouwen als een verzameling van koppels:

$$f = (f_0\backslash\{({}^*x_0, f_0({}^*x_0))\}) \cup \{({}^*x_0, f({}^*x_0))\}.$$

$f_0\backslash\{({}^*x_0, f_0({}^*x_0))\}$ is intern, want f_0 en $\{({}^*x_0, f_0({}^*x_0))\}$ zijn beiden intern[63] en $\mathbb{I}$ is een ZFC-universum. Bovendien volgt uit Stelling 1.3.3 dat $\mathbb{I}$ gesloten is onder eindige unie, zodat f intern is. We besluiten dat $f \in F_x$ en dus is elke F_x een niet-ledige verzameling.

Bekijk nu de verzameling $A := \{F_x \mid x \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha)\}$[64]. Uit Gevolg 1.3.42 kunnen we besluiten dat A een verzameling van standaard grootte is, omdat $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha) \in \mathbb{WF}$ door Stelling 1.3.3(2.). We wensen aan te tonen dat A de eindige doorsnede eigenschap heeft. Stel dat $Y \subseteq \mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha)$ een eindige verzameling is en definieer $Z := \bigcup Y = \{z \in \alpha \mid \exists y(z \in y \wedge y \in Y)\} \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha)$[65], zodat $\bigcap_{y \in Y} F_y = F_Z \neq \emptyset$. Uit Stelling 1.3.47 volgt dat $\bigcap_{x \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha)} F_x \neq \emptyset$, zodat er een interne functie g bestaat van ${}^*\alpha$ naar X dat orde-bewarend is op ${}^*x$ voor alle $x \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\alpha)$.

[62] Pas het axioma Vervanging toe.

[63] Wegens Stelling 1.3.3.

[64] Dit is een verzameling omdat elke F_x een element is van $\mathcal{P}_{\text{int}}(\{f : {}^*\alpha \to X \mid f \text{ intern}\})$, zodat we het axioma Separatie van HST kunnen toepassen.

[65] Aangezien Y een eindige verzameling is waarbij haar elementen ook eindige verzamelingen zijn.

We kunnen dus elk ordinaalgetal α orde-bewarend inbedden in (een deelverzameling van) X door middel van de afbeeldingen * en g. (Merk op dat als $x \in \alpha$, dat dan $^*x \in {}^*\alpha$.)
Omwille van het axioma Vervanging is het beeld van een ordinaal in X altijd een verzameling. Bovendien is het een verzameling van standaard grootte (wegens Gevolg 1.3.42). Voor elk ordinaalgetal α bestaat er dus een element x in P zodanig dat er een bijectieve orde-bewarende afbeelding bestaat van α naar x. We kunnen dus de klasse Ord injectief inbedden in P.
Beschouw de formule $\Phi(x, y)$ die zegt dat x een element is van P, y een ordinaal is en dat er een bijectieve orde-bewarende afbeelding bestaat van y naar x. Indien we nu het Collectie-axioma toepassen op $\Phi(x, y)$ en de verzameling P, verkrijgen we een verzameling O zodat voor alle $x \in P$, waarvoor $\exists y \Phi(x, y)$ waar is, een element $y \in O$ bestaat zodat $\Phi(x, y)$ geldt. Door de bespreking in de vorige paragraaf halen we dat Ord $\subseteq O$, zodat uit het Separatie-axioma volgt dat Ord een verzameling is in $\mathbb{H}$, een tegenstrijdigheid. $\square$

Omdat elk kardinaalgetal κ een verzameling van standaard grootte is, voldoet elke $\cap$-gesloten verzameling X met kardinaliteit κ, bestaande uit niet-ledige interne verzamelingen, aan het Saturatie-axioma. In HST is er dus κ-grootte Saturatie[66] voor elk kardinaalgetal κ. Echter, niet elke verzameling heeft een kardinaliteit in $\mathbb{H}$, zodat Onbegrensde Saturatie toch niet geldt in HST.

1.4.3 Gevolg.

1. *Het Machtsverzamelingsaxioma is niet compatibel met HST.*

2. *De Goede-Ordeningsstelling is niet compatibel met HST.*

3. *Onbegrensde Saturatie is niet compatibel met HST.*

Bewijs. (1.) Volgt uit Stelling 1.4.2

(2.) Uit Stelling 1.3.41 en Hulpstelling 1.4.1(1.) volgt dat alle oneindige interne verzamelingen niet goed-geordend kunnen worden, zodat de Goede-Ordeningsstelling niet compatibel is met HST.

(3.) Saturatie geldt niet voor verzamelingen die niet van standaard grootte zijn. Bekijk bijvoorbeeld $X_n := {}^*\mathbb{N} \setminus \{n\}$ voor alle $n \in {}^*\mathbb{N}$. Dan voldoet de verzameling $X := \{X_n \mid n \in {}^*\mathbb{N}\}$ aan de eindige doorsnede eigenschap en is $X \subseteq \mathbb{I}$. X is geen verzameling van standaard grootte en $\bigcap X = \emptyset$. $\square$

Er bestaan verzamelingen waarvoor de machtsverzameling niet bestaat. Meer zelfs: er bestaan verzamelingen waarvoor er teveel deelverzamelingen van standaard grootte zijn om te kunnen omarmen in één verzameling.

[66]Zie later voor de definitie.

We hebben bewezen dat de Goede-Ordeningsstelling niet compatibel is met HST. In ZFC is deze stelling equivalent met het Keuze-axioma. Daarom wordt in de literatuur de Goede-Ordeningsstelling soms het Keuze-axioma genoemd. De relatie van het Keuze-axioma met HST (in de formulatie met keuzefuncties) is niet volledig bekend. Men kan wel aantonen dat zijn negatie consistent is met HST[67]. In de formulaties met keuzefuncties wordt veelal de machtsverzameling van een verzameling gebruikt, zodat dit hier toch onbruikbaar zou zijn.

Een alternatieve theorie die het Machtsverzamelingsaxioma erbij wilt, zou het axioma Vervanging kunnen verbannen als compensatie. Daardoor is het beeld van een verzameling onder een functie niet noodzakelijk een verzameling. Dit is niet echt wenselijk in een verzamelingentheorie, zodat men toch ervoor kiest om het Machtsverzamelingsaxioma te laten vallen. Dat de familie van deelverzamelingen van een verzameling zo groot wordt dat het een klasse is, is intuïtief gezien niet zo erg als we denken aan de exponentiële groei van de orde van de machtsverzameling, indien we werken met eindige verzamelingen.
Bovendien bestaan er manieren om het Machtsverzamelingsaxioma te omzeilen. Zie Hoofdstukken 2 en 4 voor een verdere uiteenzetting.

Een interessante vraag die men kan stellen is of men beter kan doen in HST: HST bevat het axioma Vervanging, maar de vraag is of Saturatie, de Goede-Ordeningsstelling en het Machtsverzameling gelden voor meer dan alleen maar verzamelingen van standaard grootte. We hebben gezien in het bewijs van Hrbaček dat Keuze, Saturatie en Machtsverzameling niet gelden voor oneindige interne verzamelingen. We kunnen de vraag dus herleiden naar welke verzamelingen er 'tussen' verzamelingen van standaard grootte en oneindige interne verzamelingen liggen.

1.4.4 Definitie. We noemen een verzameling **klein** indien het een verzameling is van standaard grootte. We noemen een verzameling **groot** indien het een deelverzameling bevat die bijectief is met een oneindige interne verzameling.

De vraag kunnen we dus herleiden naar welke verzamelingen er 'tussen' kleine en grote verzamelingen liggen. Indien we ons beperken tot een grote deelklasse van $\mathbb{H}$, dan kunnen we aantonen dat alle verzamelingen ofwel klein ofwel groot zijn.

1.4.5 Definitie. Definieer Σ_2^{ss} als de collectie van alle verzamelingen van de vorm $x = \bigcup_{\xi<\kappa}\bigcap_{\eta<\lambda} x_{\xi\eta}$, met κ en λ ordinalen en elke $x_{\xi\eta}$ intern. Definieer Π_2^{ss} als de collectie van alle verzamelingen van de vorm $x = \bigcap_{\xi<\kappa}\bigcup_{\eta<\lambda} x_{\xi\eta}$, met κ en λ ordinalen en elke $x_{\xi\eta}$ intern. Definieer Δ_2^{ss} als $\Sigma_2^{ss} \cap \Pi_2^{ss}$.

1.4.6 Stelling. *Elke Δ_2^{ss}-verzameling X is ofwel klein ofwel groot*[68].

[67]Zie [9].

[68]In deze stelling gebruiken we enkel het feit dat X een Σ_2^{ss} verzameling is. De opgave van de stelling is geen restrictie, omdat $\Sigma_2^{ss} = \Pi_2^{ss} = \Delta_2^{ss}$, zie Stelling 1.4.2 uit [9].

Bewijs. We weten dat

$$X = \bigcup_{\xi<\kappa} \bigcap_{\eta<\lambda} X_{\xi\eta},$$

met κ en λ ordinalen en elke $X_{\xi\eta}$ intern. Definieer

$$X_\xi := \bigcap_{\eta<\lambda} X_{\xi\eta},$$

zodat

$$X = \bigcup_{\xi<\kappa} X_\xi.$$

X is dus een standaard grootte unie van verzamelingen X_ξ.

Indien alle verzamelingen X_ξ eindig zijn, dan zijn ze allemaal verzamelingen van standaard grootte (aangezien elke eindige verzameling goed-geordend kan worden) en dus is X de standaard grootte unie van verzamelingen van standaard grootte. Uit Gevolg 1.3.42 halen we dat X een verzameling van standaard grootte is. X is dus klein.

Indien er een bepaalde X_ξ oneindig is, dan wensen we aan te tonen dat X 'groot' is, met andere woorden dat X een oneindige interne deelverzameling bevat. Hou dus een ξ vast waarvoor $X_\xi = \bigcap_{\eta<\lambda} X_{\xi\eta}$ een oneindige verzameling is. Voor elke $u \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\lambda)$ definiëren we

$$Y_u := \bigcap_{\eta\in u} X_{\xi\eta}.$$

We hebben dat

$$X_\xi \subset Y_u,$$

zodat Y_u ook een oneindige verzameling is. Bovendien is elke Y_u intern, aangezien Y_u de eindige doorsnede is van interne verzamelingen. Definieer voor elke $u \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\lambda)$ en elke $m \in \mathbb{N}$

$$A_{um} := \{Y \in \mathcal{P}_{\text{int}}(Y_u) \mid {}^*\text{Kard}(Y) \geq m\} \subseteq \mathbb{I}.$$

A_{um} is een interne verzameling (aangezien $\mathbb{I}$ een ZFC-universum is) en bovendien niet-ledig, omdat $Y_u \in A_{um}$. Definieer nu de verzameling

$$A := \{A_{um} \mid u \in \mathcal{P}_{\text{int}}(\lambda) \text{ en } m \in \mathbb{N}\}.$$

A is een verzameling door toepassing van de axioma's Collectie en Separatie. Bovendien is A een verzameling van standaard grootte (want A bevat evenveel elementen als $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\lambda) \times \mathbb{N}$, een verzameling van standaard grootte). A voldoet ook aan de eindige doorsnede eigenschap, zodat uit Stelling 1.3.47 volgt dat $\bigcap A \neq \emptyset$. We besluiten dat er een interne verzameling Y bestaat zodat ${}^*\text{Kard}(Y) > m = {}^*m$ voor alle $m \in \mathbb{N}$, met $Y \subseteq X_\xi \subseteq X$. Y is dus een oneindige verzameling (in de zin van 1.3.14), anders zou er een $m \in \mathbb{N}$ bestaan zodat $\text{Kard}(Y) = m$[69] en dus zou ook $^*\text{Kard}(Y) = {}^*m = m$, een tegenstrijdigheid. We besluiten dat X een oneindige interne deelverzameling bevat. □

De vorige stelling is enkel toepasbaar voor Δ_2^{ss}-verzamelingen. Men kan zich afvragen hoe groot Δ_2^{ss} daadwerkelijk is. Op triviale wijze is $\mathbb{I} \subseteq \Delta_2^{ss}$. Bovendien kan men aantonen (zie Stelling 3.1.16) dat Δ_2^{ss} samenvalt met de klasse van verzamelingen $X \subseteq \mathbb{I}$ die st-$\in$-definieerbaar zijn in $\mathbb{I}$. Δ_2^{ss} is dus een soort eerste laag van niet-interne verzamelingen op $\mathbb{I}$. Daarom worden Δ_2^{ss}-verzamelingen elementaire externe verzamelingen genoemd. Δ_2^{ss} heeft nog enkele andere belangrijke eigenschappen. Het is gesloten onder standaard grote unie en doorsnede en bovendien ook onder projectie. Voor meer informatie verwijzen we naar [9].

1.4.1 De paradox van Hrbaček in algemene niet-standaard verzamelingentheorieën

Men kan zich afvragen of de paradox van Hrbaček ook geldt in andere niet-standaard verzamelingentheorieën. Een niet-standaard verzamelingentheorie is een theorie T die aan zoveel mogelijk *ideale* voorwaarden voldoet. Deze ideale voorwaarden zijn door de meeste wiskundigen algemeen aanvaard.

1. T is een uitbreiding op de gewone verzamelingentheorie ZFC. Daarmee bedoelen we dat de taal van T groter kan zijn dan de taal van ZFC en bovendien dat T meer axioma's kan bevatten dan ZFC. Deze voorwaarde zorgt ervoor dat T een uitbreiding is op de theorie die de meeste wiskundigen gebruiken (zij het meestal onbewust). Indien we te maken hebben met 'traditionele wiskunde', kunnen we ermee werken in T net zoals we ermee kunnen werken in ZFC.

2. T bevat een axioma Overdracht (zoals in HST). Kort gezegd betekent dat, voor elke formule ϕ van de 'gewone' wiskunde (met andere woorden ZFC of een deel ervan), dat ϕ geldig is in het standaard universum als en slechts als ϕ geldig is in het interne universum. Men laat het standaard universum corresponderen met de traditionele gewone wiskunde, waarmee de modale wiskundige werkt (namelijk ZFC of een deel ervan).
   Hoe het standaard en intern universum wordt vastgelegd hangt van de theorie T zelf af. Soms wordt dit gedaan door middel van predicaten (zoals in HST) of soms door middel van constanten.

3. T bevat een (sterk) Saturatie principe. Saturatie is een belangrijk principe dat ook zorgt voor het bestaan van niet-standaard elementen.

4. T laat Standardisatie toe. Voor een gegeven verzameling kunnen we al haar standaard elementen in een nieuwe standaard verzameling steken. Standardisatie zorgt ervoor

[69] Want anders zou er een bijectie bestaan van Y naar m. Deze bijectie is een eindige verzameling en dus intern wegens Hulpstelling 1.4.1.

dat men in bewijzen over kan gaan van de weinig zeggende externe verzamelingen naar de meer gekende standaard verzamelingen.

5. T is conservatief over ZFC.[70] Kort gezegd betekent het dat T een standaard feit bewijst als en slechts als het ook bewezen kan worden door ZFC. T kan dus evenveel bewijzen over de traditionele wiskunde als ZFC. Dit is een metawiskundige voorwaarde.

Elke niet-standaard verzamelingentheorie T kan nooit aan de vijf voorwaarden tegelijk voldoen. In de volgende stelling wordt bijvoorbeeld aangetoond dat het Regulariteitsaxioma over het hele universum (wat een gevolg is van de eerste voorwaarde) niet compatibel is met het Oneindigheidsaxioma van het standaard universum (wat een gevolg is van tweede voorwaarde).

1.4.7 Stelling. *Er kan geen theorie T bestaan die aan de voorwaarden (1.), (2.) en (3.) voldoet.*

Bewijs. Stel dat T een theorie is die aan de voorwaarden (1.), (2.) en (3.) voldoet. T bevat dan het Oneindigheidsaxioma over het standaard universum, zodat de verzameling ω van de natuurlijke getallen, relatief ten opzichte van het standaard universum, bestaat[71]. Zij ξ een niet-standaard element van ω. (Men kan aantonen dat ξ bestaat door middel van Saturatie (puntje (3.)), net zoals in HST.) Beschouw nu de verzameling

$$X := \{\xi - n \mid n \in \omega \text{ en } n \text{ standaard}\} .$$

Deze verzameling voldoet niet aan het axioma Regulariteit, net zoals in Stelling 1.3.19. □

Uit deze stelling kunnen we besluiten dat, indien de verzameling van de natuurlijke getallen ten opzichte van het standaard universum niet-standaard elementen bevat ten opzichte van het hele universum, het Oneindigheidsaxioma van het standaard universum incompatibel is met het Regulariteitsaxioma van het volledige universum.

We laten de traditionele wiskunde overeenkomen met het standaard universum zoals overeengekomen in (2.). Indien we willen dat sommige verzamelingen in dat universum oneindige rang hebben in de Von Neumann hiërarchie, zullen we het Regulariteitsaxioma over het volledige externe universum moeten laten vallen. Stel ZFC^- is de theorie ZFC min het axioma Regulariteit. Er is echter nog een groter probleem voor het bestaan van niet-standaard verzamelingentheorieën T indien we zelfs het Regulariteitsaxioma laten vallen:

1.4.8 Stelling (De paradox van Hrbaček)**.** *Stel T is een niet-standaard verzamelingentheorie die voldoet aan de voorwaarden (2.), (3.) en (4.) Stel dat ZFC^- in T vervat zit voor*

[70] Zie later voor enkele definities.

[71] Dit is de verzameling ${}^*\mathbb{N}$ in de theorie HST: ${}^*\mathbb{N}$ is de verzameling van de natuurlijke getallen relatief ten opzichte van $\mathbb{I}$, zodat uit het axioma Overdracht volgt dat ${}^*\mathbb{N}$ ook de verzameling van de natuurlijke getallen is relatief ten opzichte van $\mathbb{S}$.

het standaard universum en stel dat alle axioma's van ZFC^- min het Machtsverzamelings- en Keuze-axioma voor het volledige universum in T zit. Dan is T niet compatibel met het Machtsverzamelingsaxioma voor het volledige universum en niet compatibel met het Keuze-axioma voor het volledige universum.

We besluiten dat elke niet-standaard verzamelingenleer enkele axioma's van ZFC moet opgeven in het volledige universum of zwakkere vormen van de niet-standaard principes moet gebruiken.

Hoofdstuk 2

Modeltheoretische benadering in HST

De traditionele wiskunde/analyse speelt zich af in de verzamelingentheorie ZFC: de modale wiskundige werkt, al dan niet bewust, meestal in deze theorie. In niet-standaard verzamelingentheorieën laat men meestal het standaard universum corresponderen met deze traditionele wiskunde. In HST zou dit betekenen dat de modale wiskundige 'werkt' in het ZFC-universum $\mathbb{S}$. Er is echter een $\in$-isomorfisme tussen $\mathbb{S}$ en $\mathbb{WF}$, waardoor we ook kunnen aannemen dat de modale wiskundige kan werken in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$. We verkiezen $\mathbb{WF}$ boven $\mathbb{S}$, omdat $\mathbb{WF}$ transitief en $\subseteq$-gesloten is en $\mathbb{S}$ niet. Hieruit volgt dat er veel definities zijn waarvoor de $\mathbb{WF}$-interpretatie gelijk is aan de $\mathbb{H}$-interpretatie (dit is de absoluutheid van $\mathbb{WF}$). Dit werd vroeger al aangetoond in enkele voorbeelden. Hierdoor werken wiskundigen die in $\mathbb{WF}$ bezig zijn, meestal ook gewoon in $\mathbb{H}$, al dan niet bewust. Alle verzamelingen in een ZFC-universum zijn goed-gefundeerd, net zoals de verzamelingen in $\mathbb{WF}$, zodat dit nog een extra argument is waarom we $\mathbb{WF}$ verkiezen boven $\mathbb{S}$.

Een gevolg van het feit dat we de traditionele wiskunde laten overeenstemmen met $\mathbb{WF}$, is dat we een afbeelding $^* : \mathbb{WF} \to \mathbb{S} \subseteq \mathbb{I}$ hebben, net zoals het modeltheoretisch analysebeeld: $^* : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{^*\mathbb{R}}$. In de modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse (zie Bijlage C) is * een bijectieve afbeelding van de traditionele analyse (daarmee bedoelen we $\widehat{\mathbb{R}}$)[1] naar de standaard elementen van de niet-standaard analyse ($\widehat{^*\mathbb{R}}$). Ook * uit HST beeldt de traditionele wiskunde (het ZFC-universum $\mathbb{WF}$) bijectief af op de standaard elementen ($\mathbb{S}$) in $\mathbb{H}$. Bovendien komt de definitie van een interne verzameling in $\widehat{^*\mathbb{R}}$ overeen met de definitie van een interne verzameling in HST. We besluiten dat er een sterke overeenkomst is tussen * in de modeltheoretische benadering en * in HST. Om alles nog even op een rijtje te zetten: $\mathbb{WF}$ correspondeert met het traditionele universum en $\mathbb{I}$ met zijn niet-standaard uitbreiding (de *ultrapower*) waarin $\mathbb{WF}$ ingebed kan worden met een *-afbeelding. $\mathbb{S}$ is een kopie van $\mathbb{WF}$ die een elementair deelstructuur is van $\mathbb{I}$.

[1] $\widehat{\mathbb{R}}$ bevat alle objecten uit de klassieke analyse.

Een modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse zit altijd vervat in een gefixeerd ZFC-universum. In zo'n gefixeerd ZFC-universum bestaan er oneindig veel niet-standaard modellen van de reële analyse, allemaal met verschillende eigenschappen. In HST hebben we echter maar exact één afbeelding * en exact één verzameling $^*\mathbb{R}$. Er is dus een verschil tussen * in de modeltheoretische benadering en * in HST.
Dat er maar exact één verzameling $^*\mathbb{R}$ is in de niet-standaard verzamelingentheorie HST is normaal: één van de belangrijke eigenschappen van niet-standaard verzamelingentheorieën is het herstellen van de uniciteit van fundamentele wiskundige structuren en dus ook de uniciteit van $^*\mathbb{R}$. Alle wiskundige (traditionele) objecten (elementen van $\mathbb{WF}$) hebben dan ook exact *één* intrinsieke niet-standaard versie in HST, die we niet moeten construeren, maar die er gewoon 'is'.

2.1 De modeltheoretische benadering in HST

Één van de elementen die we wensen te onderzoeken is of alle eigenschappen van de modeltheoretische benadering ook gelden in HST. Het is echter niet mogelijk om de modeltheoretische benadering in te bedden in HST: een volledig analogon van de modeltheoretische *-benadering in één gefixeerd ZFC-universum is onmogelijk in HST indien we kijken naar de *-afbeelding van HST.
HST bevat zeker drie ZFC-universa: $\mathbb{S}$, $\mathbb{I}$ en $\mathbb{WF}$. In elk van deze universa kunnen we de 'normale' modeltheoretische benadering uitvoeren, maar dit komt nooit overeen met de *-benadering uit HST. Elk van deze modeltheoretische benaderingen is relatief bekeken ten opzichte van het gekozen universum. Bijvoorbeeld zijn de externe verzamelingen van zo'n modeltheoretische benadering in $\mathbb{WF}$ goed-gefundeerd, in $\mathbb{S}$ standaard en in $\mathbb{I}$ intern. In zo'n universum ontstaat er een andere notie van 'standaard' verzamelingen dan de standaard verzamelingen in HST en dus ook een andere notie van interne/externe verzamelingen dan deze in HST.

Wat is het nut van de theorie HST als de modeltheoretische benadering er niet in vervat zit? Zoals eerder gezegd heeft een verzamelingentheorie, zoals HST, de belangrijke eigenschap van het herstellen van de uniciteit van fundamentele wiskundige objecten. Een verzamelingentheorie is dan ook ontwikkeld om structuren en modellen te onderzoeken. Een verzamelingenleer kan modellen van zichzelf bestuderen, terwijl de gewone rekenkunde dit niet kan. In een verzamelingenleer kan men in feite zoveel meer doen dan in de klassieke analyse. De bedoeling van HST, en andere niet-standaard verzamelingentheorieën, is de verzamelingenleer herintroduceren door middel van fundamentele notie van niet-standaard analyse toe te voegen. Men probeert een universum te construeren dat lijkt op het normale verzamelingstheoretisch universum van ZFC en die niet-standaard methodes/objecten heeft zonder deze te construeren, maar waarbij deze objecten gewoon aanwezig zijn. Het is dus een hulpmiddel om de 'gewone' volledige verzamelingenleer op een andere manier te bekijken en intuïtiever te benaderen.

Door middel van een niet-standaard verzamelingenleer kan men uitspraken/modellen onderzoeken over/in de gewone verzamelingentheorie ZFC. Bijvoorbeeld voldoet HST (samen met het Constructibiliteitsaxioma) aan de reducibiliteitseigenschap, zodat men uitspraken in HST over $\mathbb{S}$ kan vertalen naar uitspraken in ZFC.[2] Het zorgt ervoor dat werken in HST niet te ver verwijderd is van werken in ZFC.

Om een lang verhaal kort te maken: HST is een verzamelingentheorie waarin alle objecten uniek aanwezig zijn. Ook ${}^*\mathbb{R}$ is daar uniek aanwezig. Het is geen analogon van de modeltheoretische benadering, maar men kan echter wel werken in $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$. Het beste is dat we er gebruik van maken om de gewone klassieke analyse (in $\mathbb{WF}$) beter te leren kennen, net zoals modeltheoretisch de bedoeling is. Een analist kan dus gebruik maken van ${}^*\mathbb{R}$ zonder het te hoeven construeren. Hij kan bepaalde methodes kopiëren vanuit de modeltheoretische benadering, maar nu in een ander universum, namelijk $\mathbb{H}$. Vele van deze methodes en constructies kunnen overgenomen worden, maar soms moet dit op een andere manier gebeuren, omwille van de afwezigheid van het Machtsverzamelingsaxioma.

2.1.1 Constructie van $\mathbb{R}$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ in HST

We zijn bijvoorbeeld geïnteresseerd in de vraag of het Overdrachtsprincipe van de modeltheoretische benadering nog geldig blijft in HST. Daarvoor hebben we de bovenbouw $\widehat{\mathbb{R}}$ nodig. We zijn $\mathbb{R}$ al verscheidene keren tegengekomen, maar we hebben nog geen constructie gegeven van hoe $\mathbb{R}$ wordt opgebouwd in HST. In deze paragraaf wordt dit kort geschetst en hieruit zal volgen dat de opbouw van $\mathbb{R}$ in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$ gelijk is aan de opbouw van $\mathbb{R}$ in $\mathbb{H}$. De $\mathbb{H}$-reële getallen zijn in feite gelijk aan de $\mathbb{WF}$-reële getallen. (Een gevolg van het feit dat $\mathbb{WF}$ transitief en $\subseteq$-compleet is.)

De verzameling van de natuurlijke getallen, $\mathbb{N}$, hebben we al in HST gedefinieerd. We weten dat $\mathbb{Z}$ de verzameling is van equivalentieklassen van $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ onder een equivalentierelatie R.

$$\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\,/R,$$

met R de equivalentierelatie

$$\begin{aligned}(m,n)\,R\,(m',n') \quad &\Leftrightarrow \quad m-n=m'-n' \\ &\Leftrightarrow \quad m+n'=n+m'.\end{aligned}$$

Een equivalentieklasse $[(m,n)]$ stelt het geheel getal $m-n$ voor. Is $\mathbb{Z}$ zinvol gedefinieerd in HST? Omdat $\mathbb{N}\in\mathbb{WF}$, kan men in $\mathbb{WF}$ de verzamelingen $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ opbouwen. We weten ook dat $R\subseteq(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Omdat HST het Machtsverzamelingsaxioma niet bevat, zou men kunnen denken dat men R niet kan definiëren in HST. Omdat echter $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ een element is van $\mathbb{WF}$, bestaat haar machtsverzameling

[2]Zie Hoofdstuk 3 voor de definitie.

in HST en is $R \in \mathbb{WF}$. Het eindresultaat, $\mathbb{Z}$, is dan ook een verzameling van $\mathbb{WF}$.
Om $\mathbb{Q}$ te definiëren uit $\mathbb{Z}$ kunnen we op dezelfde manier tewerk gaan: $\mathbb{Q}$ kan opgevat worden als een collectie van equivalentieklassen van tripels (p, m, n) met $p = 0, 1$ en $m, n \in \mathbb{N}$ zodat $n \neq 0$. Zo'n tripel stelt het rationaal getal $(1 - 2p)\frac{m}{n}$ voor. Twee tripels zijn equivalent als ze hetzelfde rationaal getal voorstellen. Het resultaat, $\mathbb{Q}$, is dan een verzameling van $\mathbb{WF} \subseteq \mathbb{H}$. Analoog voor de constructie van $\mathbb{R}$ uit $\mathbb{Q}$: eerst moeten we de gewone ordening op $\mathbb{Q}$ definiëren, waaruit we $\mathbb{R}$ kunnen halen als Dedekind snedes in $\mathbb{Q}$. We halen leiden hieruit af dat $\mathbb{R} \in \mathbb{WF}$.

Het is een voordeel om de traditionele wiskunde te laten overeenstemmen met $\mathbb{WF}$: het zorgt ervoor dat, indien we spreken over de reële getallen in de traditionele gewone wiskunde (met andere woorden in het universum $\mathbb{WF}$), we ook kunnen spreken over de reële getallen in $\mathbb{H}$. We moeten dus geen restrictie nemen op de reële getallen indien we wensen te redeneren in het traditionele universum.

In de modeltheoretische benadering werkt men vaak in de bovenbouw $\widehat{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$. We herhalen kort de definitie van de bovenbouw $\widehat{\mathbb{R}}$ (zie Bijlage C.1.1 voor algemene definitie).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^0(\mathbb{R}) &:= \mathbb{R}, \\ \mathcal{P}^1(\mathbb{R}) &:= \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cup \mathbb{R}, \\ \mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{R}) &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(\mathbb{R})) \cup \mathcal{P}^n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dan is $\widehat{\mathbb{R}} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^i(\mathbb{R})$. We wensen aan te tonen dat ook $\widehat{\mathbb{R}}$ een element is van $\mathbb{WF}$.

2.1.1 Stelling. $\widehat{\mathbb{R}}$ *is een verzameling in* $\mathbb{WF}$.

Bewijs. Zowel $\mathbb{R}$ als $\mathbb{N}$ zijn elementen van $\mathbb{WF}$, zodat, wegens inductie, $\mathcal{P}^i(\mathbb{R}) \in \mathbb{WF}$ voor elke $i \in \mathbb{N}$. We weten dat $\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^i(\mathbb{R})$. Omdat $\mathbb{N}$ en $\mathcal{P}^i(\mathbb{R})$ elementen zijn van het ZFC-universum $\mathbb{WF}$, zou daaruit volgen dat $\widehat{\mathbb{R}}$ een verzameling is in $\mathbb{WF}$. In principe moet men ook aantonen dat

$$\{\mathcal{P}^i(\mathbb{R}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

een verzameling is (in $\mathbb{WF}$), alvorens men de unie erover kan nemen.[3] Dit tonen we nu aan. Definieer

$$\begin{aligned} \phi(i, x) &\equiv x \in \mathcal{P}^i(\mathbb{R}) \\ &\equiv \forall f([\text{‘}f \textbf{ is een functie met domein het natuurlijk getal } (i+1)\text{’} \\ &\quad \wedge \text{‘}f \textbf{ is strikt } \in\textbf{-dalend}\text{’} \wedge\ f(0) = x] \\ &\quad \Longrightarrow \exists k(k < (i+1) \wedge f(k) \in \mathbb{R})). \end{aligned}$$

[3]Dit moet ook in de theorie ZFC, indien men dit daar wenst aan te tonen.

'f is een functie met domein het natuurlijk getal $(i+1)$**'** kunnen we eenvoudig uitdrukken met een $\in$-formule, zoals eerder. **'f is strikt $\in$-dalend'** betekent hier $\forall k(k < i \to f(k) \ni f(k+1))$. We tonen nu aan via inductie op i dat de formule $\phi(i,x)$ daadwerkelijk betekent dat '$x \in \mathcal{P}^i(\mathbb{R})$'. Eerst merken we op dat $n = \{0, \ldots, n-1\}$.

Indien $i = 0$, dan betekent $\phi(0,x)$ dat $x \in \mathbb{R}$, zodat $\phi(0,x)$ inderdaad betekent dat '$x \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R})$'.
Stel nu dat $i = (l+1) > 0$. Zij $x \in \mathcal{P}^{l+1}(\mathbb{R})$. Dan is ofwel $x \in \mathcal{P}^l(\mathbb{R})$, ofwel $x \subseteq \mathcal{P}^l(\mathbb{R})$. In het eerste geval volgt uit de inductiehypothese dat $\phi(l,x)$ geldt, zodat we hieruit eenvoudig $\phi(l+1,x)$ halen. In het tweede geval hebben we, wegens de inductiehypothese, dat voor elk element $y \in x$, $\phi(l,y)$ waar is. Zij f nu een functie met domein $i+1 = l+2$, f strikt $\in$-dalend en $f(0) = x$. We wensen aan te tonen dat er een $k \leq i = l+1$ bestaat zodat $f(k) \in \mathbb{R}$. Definieer $g(j) := f(j+1)$,voor $j < i$. g is een functie met domein $i = l+1$ dat $\in$-dalend is. Omdat $g(0) \in x$, is $\phi(l, g(0))$ waar, zodat er een $k < i$ bestaat waarvoor geldt dat $f(k+1) = g(k) \in \mathbb{R}$, hetgene dat we moesten bewijzen.
Zij nu dat $\phi(i,x) = \phi(l+1,x)$ waar is. We wensen aan te tonen dat $x \in \mathcal{P}^{l+1}(\mathbb{R})$. Indien $x \in \mathbb{R}$, dan is dit triviaal. Zij dus $x \notin \mathbb{R}$. Kies een willekeurig element $y \in x$. Trivialerwijs is $\phi(l,y)$ waar, zodat uit de inductiehypothese volgt dat $y \in \mathcal{P}^l(\mathbb{R})$. Er geldt dus dat $x \subseteq \mathcal{P}^l(\mathbb{R})$, zodat $x \in \mathcal{P}^{l+1}(\mathbb{R})$.

Definieer nu

$$\begin{aligned}
\Phi(i,y) &\equiv (y = \mathcal{P}^i(\mathbb{R})) \\
&\equiv \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in \mathcal{P}^i(\mathbb{R})) \\
&\equiv \forall x(x \in y \leftrightarrow \phi(i,x)).
\end{aligned}$$

Door gebruik te maken van het Collectie-axioma met de formule Φ en de verzameling $\mathbb{N}$ verkrijgen we een verzameling die alle $\mathcal{P}^i(\mathbb{R})$ bevat als element. Door toepassing van het Separatie-axioma volgt dan dat

$$\{\mathcal{P}^i(\mathbb{R}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

een verzameling is in $\mathbb{H}$. Omdat $\{\mathcal{P}^i(\mathbb{R}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ een deelverzameling is van $\mathbb{WF}$ is het een element van $\mathbb{WF}$. $\square$

2.1.2 Het modeltheoretische Overdrachtsprincipe in HST

Omdat $\widehat{\mathbb{R}}$ een goed-gefundeerde verzameling is in HST kunnen we spreken van ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$. In de modeltheoretische zin is dit de verzameling van alle interne verzamelingen van $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$. (Zie Bijlage C voor een uiteenzetting.) Voor een niet-standaard model hebben we het beeld van $\widehat{\mathbb{R}}$ onder * nodig, wat een verzameling is in HST. Het is geen geconstrueerd niet-standaard model zoals in ZFC, maar we kunnen ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$ wel gebruiken om $\widehat{\mathbb{R}}$ beter te verstaan. We zijn geïnteresseerd in de vraag welke eigenschappen van de modeltheoretische benadering nog

geldig blijven.
Ten eerste is $\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$, zodat ${}^*\mathbb{R}$ zeker elementen bevat die niet in $\mathbb{R}$ zitten. Bovendien is

$$\{{}^*x \mid x \in \mathbb{R}\} \subsetneq {}^*\mathbb{R},$$

net zoals in de modeltheoretische benadering het geval is. Modeltheoretisch zijn de standaard elementen van ${}^*\mathbb{R}$ gelijk aan die elementen die afkomstig zijn van $\mathbb{R}$ onder *. Ook in HST is dit het geval.

2.1.2 Stelling. *Een element $a \in {}^*\mathbb{R}$ is standaard als en slechts als $a = {}^*b$ voor een zekere $b \in \mathbb{R}$.*

Bewijs. De ene richting is triviaal. Zij omgekeerd $a \in {}^*\mathbb{R}$ standaard. Dan bestaat er een $w \in \mathbb{WF}$ zodat $a = {}^*w \in {}^*\mathbb{R}$. Door $*$-Overdracht verkrijgen we dan dat $w \in \mathbb{R}$. □

Modeltheoretisch identificeert men x met ${}^*x$ indien $x \in \mathbb{R}$. In HST doen we dit niet, behalve als we werken met natuurlijke of rationale getallen: voor elementen n van $\mathbb{N}$ hebben we reeds bewezen dat $n = {}^*n$. Rationale getallen zijn eindige tripels van elementen van $\mathbb{N}$, zodat ook $q = {}^*q$ voor $q \in \mathbb{Q}$.

We willen aantonen dat ook het Overdrachtsprincipe van de modeltheoretische benadering geldig is in HST.

Overdrachtsprincipe: Zij $\Phi(x, y, \dots)$ een $\mathcal{L}_0$-formule waarin $x, y, \dots$ als enige vrije veranderlijken optreden. Zij $a, b, \dots$ objecten van $\widehat{\mathbb{R}}$. Dan geldt:

$$\Phi(a, b, \dots) \text{ is waar} \Leftrightarrow \Phi({}^*a, {}^*b, \dots) \text{ is waar.}$$

Zie Bijlage C voor de definitie van de taal $\mathcal{L}_0$ en de definitie van een $\mathcal{L}_0$-formule. Merk op dat we in HST werken in de taal $\mathcal{L}$ met relatiesymbolen st , $\in$ en $=$, terwijl het Overdrachtsprincipe gedefinieerd werd voor $\mathcal{L}_0$-formules. We wensen aan te tonen dat uit $*$-Overdracht het modeltheoretische Overdrachtsprincipe volgt.

2.1.3 Stelling. *Uit $*$-Overdracht volgt het Overdrachtsprincipe.*

Bewijs. $*$-Overdracht was geldig voor $\in$-fomules en parameters in $\mathbb{WF}$. Voor het Overdrachtsprincipe hebben we $\mathcal{L}_0$-formules nodig en parameters uit $\widehat{\mathbb{R}}$. Het verschil tussen $\mathcal{L}_0$-formules en $\in$-formules is dat bij $\in$-formules de kwantoren onbegrensd moeten zijn. We willen dus de begrensde kwantoren (bijvoorbeeld $\forall x \in t$) omzetten in onbegrensde kwantoren.
We kunnen de uitspraak '$x \in t$', met t een $\mathcal{L}_0$-term uitdrukken met een $\in$-formule $\phi_t(x, x_1, \dots, x_k)$ met $x_1, \dots, x_k$ de variabelen die optreden in t. Omdat in de taal $\mathcal{L}_0$ de enige termen de variabelen zijn, kan men eenvoudig $\phi_t(x)$ definiëren als '$x \in t$'. Correct gezien ziet de formule ϕ_t eruit als $\phi_t(x, t)$ en zullen we dit noteren als $\phi(x, t)$.
De begrensde kwantor $\forall x \in t$ kunnen we vervangen door de onbegrensde kwantor $\forall x(\phi(x, t) \Rightarrow \dots)$. Analoog kunnen we de begrensde kwantor $\exists x \in t$ vervangen door $\exists x(\phi(x, \dots) \wedge \dots)$.

We besluiten dat een $\mathcal{L}_0$-formule Φ kan omgevormd worden tot een $\in$-formule, die we noteren als Φ', met dezelfde vrije variabelen.

Stel dat $\Phi(x, y, \dots)$ een $\mathcal{L}_0$-formule is met vrije variabelen $x, y, \dots$ Voor de eenvoud van notatie stellen we dat x en y de enige vrije variabelen zijn van Φ. Neem aan dat $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$. a en b zijn objecten in $\mathbb{WF}$ wegens de transitiviteit van de klasse $\mathbb{WF}$. Φ' is een $\in$-formule, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat

$$\Phi'^{\mathrm{wf}}(a, b) \Leftrightarrow \Phi'^{\mathrm{int}}({}^*a, {}^*b).$$

Om het Overdrachtsprincipe aan te tonen, hebben we nodig dat $\Phi'^{\mathrm{wf}}(a, b)$ equivalent is met $\Phi'(a, b)$ en $\Phi'^{\mathrm{int}}({}^*a, {}^*b)$ equivalent is met $\Phi'({}^*a, {}^*b)$. We tonen het aan voor $\Phi'^{\mathrm{wf}}(a, b)$ en $\Phi'(a, b)$. De andere equivalentie volgt analoog.
Een variabele in Φ' komt ofwel vrij ofwel gebonden voor. Een gebonden variabele is, wegens de constructie van Φ' uit Φ altijd een element van een andere variabele. Die andere variabele kan ofwel vrij ofwel gebonden voorkomen in Φ'. We kunnen deze procedure verder zetten. Omdat elke formule bestaat uit een eindig aantal symbolen, bestaat er voor elke variabele x een eindige keten van variabelen zodanig dat $x \in x_1 \in \dots x_{n-1} \in x_n$ waarbij $x_1, \dots, x_{n-1}$ gebonden voorkomt in Φ' en x_n vrij voorkomt in Φ'. (Merk op dat bij afspraak elke variabele hoogstens één keer gebonden of vrij voorkomt in een formule.) Omwille van deze redenering en de transitiviteit van $\mathbb{WF}$ is elke gebonden variabele die voorkomt in $\Phi'(a, b)$ altijd een element van $\mathbb{WF}$. Hieruit volgt eenvoudig dat men $\Phi'^{\mathrm{wf}}(a, b)$ kan afleiden uit $\Phi'(a, b)$. De omgekeerde implicatie kan men op dezelfde wijze verkrijgen. $\square$

Men kan dit ook algemener bewijzen.

2.1.4 Stelling. *Zij $\mathcal{L} \in \mathbb{WF}$ een eindige taal en $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I}) \in \mathbb{WF}$ een $\mathcal{L}$-structuur. Dan is de afbeelding $x \mapsto {}^*x$, met restrictie genomen tot domein M, een elementaire inbedding*[4] *van $\mathcal{M}$ in ${}^*\mathcal{M}$ in de zin van $\mathcal{L}$.*
Bovendien is ${}^*\mathcal{M}$ κ-gesatureerd voor elk kardinaalgetal κ. Dit betekent dat elke collectie $\{X_\xi\}_{\xi<\kappa}$, waarvoor $\emptyset \neq X_\xi \subseteq \mathcal{M}$, die voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap en die $\mathcal{L}$-definieerbaar is in ${}^*\mathcal{M}$, een niet-ledige doorsnede heeft.

Bewijs. We gaan geen volledig bewijs geven van deze stelling: het bewijs lijkt namelijk op het bewijs van Stelling 2.1.3, met als verschil dat we het meer formeel moeten neerschrijven. Voor een concreet bewijs, zie Stelling 1.5.20 in [9] of Stelling 11 in [8].
We geven een korte schets en wat meer uitleg over de gebruikte symbolen. Een taal $\mathcal{L}$ bevat logische connectoren (zoals bijvoorbeeld $\wedge$), kwantoren, constanten, functiesymbolen en relatiesymbolen. Om dit uit te drukken in $\mathbb{WF}$, codeert men deze symbolen. Logische connectoren en kwantoren worden, zoals in modeltheorie meestal het geval is, gecodeerd als

[4] Zie Bijlage A voor de definitie van een elementaire deelstructuur. Een elementaire inbedding is bijna hetzelfde, behalve dat we dan de beelden van de elementen van $\mathcal{M}$ onder * beschouwen. Met andere woorden * is een elementaire inbedding als $\forall n_1, \dots, n_k \in M(\mathcal{M} \models \phi(n_1, \dots, n_k) \Leftrightarrow {}^*\mathcal{M} \models \phi(n_1, \dots, n_k))$ geldt voor elke $\mathcal{L}$-formule ϕ.

natuurlijke getallen; terwijl de overige symbolen worden gecodeerd als speciale variabelen. Zowel $\mathcal{M}$ als ${}^*\mathcal{M}$ zijn $\mathcal{L}$-structuren: indien bijvoorbeeld $R \subseteq M^n$ een interpretatie is van het relatiesymbool $\mathcal{R} \in \mathcal{L}$ in $\mathcal{M}$, dan is ${}^*R \subseteq {}^*M^n$ een interpretatie van hetzelfde relatiesymbool in ${}^*\mathcal{M}$. De $\in$-formule Form$(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \phi)$ (zie Bijlage A) drukt uit dat $\mathcal{L}$ (de codering van) een taal is, $\mathcal{M}$ (de codering van) een $\mathcal{L}$-structuur en ϕ (de codering van) een $\mathcal{L}$-formule.
Deze stelling zegt dat voor elke gesloten $\mathcal{L}$-formule ϕ, waarvoor Form$(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \phi)$ waar is, geldt dat

$$\mathcal{M} \models \phi \Leftrightarrow {}^*\mathcal{M} \models {}^*\phi.$$

Daarbij wordt ${}^*\phi$ verkregen uit ϕ door alle parameters m in ϕ te vervangen door ${}^*m$. $\mathcal{M} \models \phi$ is hetzelfde als beweren dat de $\in$-formule True$(\mathcal{M}, \phi)$ waar is (zie Bijlage A: True$(\mathcal{M}, \phi)$ betekent dat er een valideringsfunctie τ bestaat op de verzameling van alle deelformules van ϕ). Door gebruik te maken van $*$-Overdracht verkrijgen we dat $\mathrm{True}^{\mathrm{wf}}(\mathcal{M}, \phi)$ waar is als en slechts als $\mathrm{True}^{\mathrm{int}}({}^*\mathcal{M}, {}^*\phi)$ waar is. Net zoals in Stelling 2.1.3 moeten we het bewijs afwerken door aan te tonen dat $\mathrm{True}^{\mathrm{int}}({}^*\mathcal{M}, {}^*\phi)$ equivalent is met $\mathrm{True}({}^*\mathcal{M}, {}^*\phi)$ en dat $\mathrm{True}^{\mathrm{wf}}(\mathcal{M}, \phi)$ equivalent is met $\mathrm{True}(\mathcal{M}, \phi)$.
De 'bovendien' is een gevolg van Stelling 1.3.47. □

Het modeltheoretisch Overdrachtsprincipe is, op een paar details na, dus ook geldig in HST. Men zou kunnen zeggen dat alles wat we modeltheoretisch kunnen doen, ook in HST geldig is. HST bevat echter niet het Machtsverzamelingsaxioma, zodat dit praktisch gezien problemen kan opleveren in enkele toepassingen.

2.2 Het Machtsverzamelingsaxioma

Uit de paradox van Hrbaček volgt dat *elke* oneindige interne verzameling in $\mathbb{H}$ geen machtsverzameling heeft. Dus $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ is geen verzameling in HST en elke andere oneindige interne deelverzameling van ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$ heeft geen machtsverzameling. We kunnen dus misschien niet alle constructies uitvoeren die we wensen te gebruiken.
Dat $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ geen verzameling is in $\mathbb{H}$, is niet zo erg, aangezien we meestal werken met verzamelingen in ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$ omdat we vertrekken vanuit $\widehat{\mathbb{R}}$. ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$ is wel een verzameling in HST, zodat we kunnen werken met verzamelingen in ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$. Deze verzamelingen zijn allemaal intern.
Externe verzamelingen kunnen interessant zijn voor bepaalde constructies, bijvoorbeeld voor de Loeb-maat (zie Paragraaf 2.3.4). De Loeb-maat kunnen we echter wel construeren in HST, ook al is $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ geen verzameling. Indien we willen werken met externe verzamelingen in HST moeten we gewoon werken buiten $\mathbb{I}$.

Dat *elke* oneindige interne verzameling geen machtsverzameling heeft in HST kan wel problemen opleveren. Één mogelijkheid tot het bekomen van een oplossing is door het Machtsverzamelingsaxioma proberen toe te voegen bij de axioma's van HST. Dit wordt onderzocht in Hoofdstuk 4. Hierdoor zal echter het axioma Saturatie moeten afgezwakt worden. Dit is modeltheoretisch gezien niet zo erg, aangezien er daar ook meestal maar beperkte Saturatie voor handen is (zie Paragraaf C.4). Een anders oplossing is om het axioma Machtsverzameling te omzeilen, zonder deze te gebruiken in HST. Een voorbeeld wordt onderzocht in de volgende paragraaf (Paragraaf 2.2.1).

2.2.1 De verzamelingen X^λ en $[X]^\kappa$

2.2.1 Definitie. Zij X een willekeurige verzameling. Definieer X^λ als de collectie van alle afbeeldingen van het *ordinaalgetal* λ naar X. Definieer $X^{<\lambda}$ als $\bigcup_{\xi<\lambda} X^\xi$.

2.2.2 Definitie. Zij X een willekeurige verzameling. Definieer $[X]^\kappa$ als de collectie van alle deelverzamelingen van X bijectief met het *kardinaalgetal* κ. Definieer $[X]^{<\kappa}$ als $\bigcup_{\xi<\kappa}[X]^\xi$.

De collecties X^λ en $[X]^\kappa$ worden in ZFC veel gebruikt. Door het Machtsverzamelingsaxioma kan men in ZFC besluiten dat deze collecties verzamelingen zijn. HST bevat het Machtsverzamelingsaxioma niet, maar toch kan men, door gebruik te maken van andere argumenten, ook in HST bewijzen dat beide collecties verzamelingen zijn. Wiskundigen die de modeltheoretische niet-standaard benadering zonder na te denken willen kopiëren naar HST, komen meestal in de problemen in HST, omdat HST het Machtsverzamelingsaxioma niet bevat. Enkel de personen die de moed hebben om verder te kijken zullen veel meer constructies kunnen uitvoeren zonder gebruik te maken van het Machtsverzamelingsaxioma.

We zullen bewijzen dat de collecties X^λ, $X^{<\lambda}$, $[X]^\kappa$ en $[X]^{<\kappa}$ verzamelingen zijn in HST. Daarvoor hebben we nodig dat de klasse $\mathbb{I}$ voldoet aan Extensie.

2.2.3 Definitie. Stel $\mathbb{A}$ is een klasse waarvoor $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{I}$. Een functie $f : S \to \mathbb{A}$ gedefinieerd op een verzameling $S \subseteq \mathbb{A}$ is **$\mathbb{A}$-uitbreidbaar** als er een functie $g \in \mathbb{A}$ (dus intern) bestaat waarvoor $S \subseteq dom(g)$ en $f = g/S$. Zo'n functie g noteren we als f°.
De klasse $\mathbb{A}$ voldoet aan **Extensie** indien elke functie $f : S \to \mathbb{A}$, gedefinieerd op een verzameling $S \subseteq \mathbb{A}$ van standaard grootte, $\mathbb{A}$-uitbreidbaar is.

2.2.4 Stelling. *De klasse $\mathbb{I}$ voldoet aan Extensie.*

Bewijs. Zij $f : S \to \mathbb{I}$ een functie met domein $S \subseteq \mathbb{I}$, een verzameling van standaard grootte. We wensen aan te tonen dat f $\mathbb{I}$-uitbreidbaar is.
Door het axioma Vervanging is $range(f) \subseteq \mathbb{I}$ een verzameling in $\mathbb{H}$. Door Gevolg 1.2.21 bestaan er standaard verzamelingen R en S' zodat $range(f) \subseteq R$ en $S \subseteq S'$. $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ is een verzameling van standaard grootte in $\mathbb{H}$ omwille van Gevolg 1.3.42 en omdat S een verzameling is van standaard grootte. Definieer nu voor alle $w \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$.

$$\begin{aligned} G_w \;:=\; & \{h \in \mathbb{I} \mid h \text{ is functie met domein bevat in } S' \text{ en bereik bevat in } R, \\ & \text{zodat } w \subseteq dom(h) \text{ en } h/w = f/w\} \end{aligned}$$

Elke G_w is interne verzameling: een $h \in G_w$ is een element van $\mathcal{F}_{\text{int}}(\mathcal{P}_{\text{int}}(S'), \mathcal{P}_{\text{int}}(R))$[5] en zowel w als f/w zijn eindige deelverzamelingen van $\mathbb{I}$, zodat uit Hulpstelling 1.4.1 volgt dat w en f/w intern zijn. Uit Gevolg 1.2.20 volgt dat G_w bestaat in $\mathbb{H}$.

Door middel van inductie op de grootte van w kan men aantonen dat $G_w \neq \emptyset$. Zij $n \in \mathbb{N}$ het aantal elementen van w. Indien $n = 0$, dan is G_w trivialerwijs verschillend van $\emptyset$. Stel nu dat $n > 0$ en zij $w = w' \cup \{z\}$ met $|w'| = n - 1$. Uit de inductiehypothese volgt dat $G_{w'} \neq \emptyset$. Kies een willekeurige $g \in G_{w'}$ vast, zodat g een interne functie is met bereik in R, $w' \subseteq dom(g) \subseteq S'$ en met $g/w' = f/w'$. Definieer nu in het ZFC-universum $\mathbb{I}$:

$$\begin{aligned} h(y) &:= g(y), \text{ voor alle } y \neq z \text{ in } dom(g), \\ h(z) &:= f(z). \end{aligned}$$

(Met andere woorden: $h = (g \backslash (z, g(z))) \cup (z, f(z))$ indien $z \in dom(g)$ en $h = g \cup (z, f(z))$ indien $z \notin dom(g)$. Zowel $(z, g(z))$ als $(z, f(z))$ zijn interne verzamelingen.) h is dus een interne functie behorend tot G_w.

We wensen nu aan te tonen dat

$$X := \{G_w \mid w \in \mathcal{P}_{\text{int}}(S)\}$$

een verzameling is in $\mathbb{H}$. Definieer de formule Φ met parameters f en R:

$$\begin{aligned} \Phi(w, z) &\equiv (z = G_w) \\ &\equiv \forall y (y \in z \leftrightarrow y \in G_w), \end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned} y \in G_w \equiv\ & \text{‘}y\textbf{ is een interne functie’} \wedge w \subseteq dom(y) \subseteq S' \wedge range(y) \subseteq R \\ \wedge\ & \forall x (x \in w \rightarrow \exists u ((x, u) \in f \wedge (x, u) \in y)). \end{aligned}$$

Omdat G_w een verzameling is, kunnen we het Collectie-axioma toepassen op de formule $\Phi(w, z)$ en de verzameling $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$. We bekomen een verzameling die alle G_w's bevat. Uit het Separatie-axioma volgt dan dat X een verzameling is in $\mathbb{H}$. Bovendien is X een verzameling van standaard grootte, omdat $\mathcal{P}_{\text{int}}(S)$ een verzameling van standaard grootte is.

X is $\cap$-gesloten: $G_w \cap G_{w'} = G_{w \cup w'}$. Uit het axioma Saturatie volgt dan dat er een element $f^\circ \in \bigcap_{w \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(S)} G_w$ bestaat. f° is een interne functie zodanig dat $S \subseteq dom(f^\circ) \subseteq S'$, $range(f^\circ) \subseteq R$ en $f = f/S = f^\circ/S$. f is dus $\mathbb{I}$-uitbreidbaar. $\square$

2.2.5 Gevolg.

[5] $\mathcal{F}_{\text{int}}(X, Y)$ voor interne verzamelingen X en Y is de verzameling van de interne functies van X naar Y en is zelf een element van $\mathbb{I}$.

1. *Zij $S \subseteq \mathbb{S}$ en $f : S \to \mathbb{I}$ een functie met domein S. Dan bestaat er een interne functie g zodat $S \subseteq dom(g)$ en $f = g/S$.*

2. *Zij $W \in \mathbb{WF}$ en $f : W \to \mathbb{I}$ een functie met domein W. Dan bestaat er een interne functie g zodat $g : {}^*W \to \mathbb{I}$ en $f(w) = g({}^*w)$ voor alle $w \in W$. Bovendien kan men ervoor zorgen dat het bereik van g in een willekeurige standaard verzameling R bevat zit (als deelverzameling), indien het bereik van f in R bevat zit (als deelverzameling).*

Bewijs. (1.) Omdat elke verzameling $S \subseteq \mathbb{S}$ een verzameling is van standaard grootte, volgt het te bewijzen uit Stelling 2.2.4.

(2.) Definieer een functie h met domein $S = \{{}^*w \mid w \in W\}$ als volgt:

$$h({}^*w) = f(w).$$

S is wel degelijk een verzameling in $\mathbb{H}$. Dit verkrijgen we door gebruik te maken van het Vervangingsaxioma met de formule $\Phi(x, y) \equiv ({}^*x = y)$ en de verzameling W. h is een functie in $\mathbb{H}$, met andere woorden een verzameling in $\mathbb{H}$: stel namelijk $\Psi(w, z)$ is de formule die uitdrukt dat $z = ({}^*w, f(w))$. Door gebruik te maken van het Collectie- en Separatie-axioma verkrijgen we dat $h = \{(u, f(w)) \mid u = {}^*w \wedge w \in W\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$.
Omdat S een verzameling van standaard grootte is (elke deelverzameling van $\mathbb{S}$ is van standaard grootte), volgt uit Stelling 2.2.4 dat er een interne functie g' bestaat zodat $S \subseteq dom(g') \subseteq {}^*W$ en $h = g'/S$ (neem de verzameling S' in Stelling 2.2.4 als ${}^*W$). Bovendien kan men ervoor zorgen dat het bereik van g' in een willekeurige standaard verzameling R ligt (als deelverzameling) dat $range(f)$ bevat als deelverzameling (neem de verzameling R in Stelling 2.2.4 als R).

Omdat $\mathbb{I}$ een ZFC-universum is, is $dom(g')$ ook een interne verzameling (we passen Gevolg 1.2.20 namelijk toe). Doordat $\mathbb{I}$ transitief is, kan men de functie g volledig definiëren in het ZFC-universum $\mathbb{I}$: zij a een willekeurig element in het bereik van f en definieer

$$\begin{aligned} g(x) &:= g'(x),\ \forall x \in dom(g') \cap {}^*W, \\ g(x) &:= a,\ \forall x \in {}^*W \backslash dom(g'). \end{aligned}$$

g is de gevraagde functie. □

2.2.6 Stelling. *Zij $X \subseteq \mathbb{I}$ een verzameling. Voor elk ordinaalgetal λ zijn X^λ en $X^{<\lambda}$ verzamelingen in HST. Voor elk kardinaalgetal κ zijn $[X]^\kappa$ en $[X]^{<\kappa}$ verzamelingen in HST.*

Bewijs. (1.) X^λ is een verzameling.
Omdat $X \subseteq \mathbb{I}$ volgt uit Gevolg 1.2.21 dat er een standaard verzameling S bestaat zodat $X \subseteq S$. Indien S^λ een verzameling is, kan men door middel van het axioma Separatie bekomen dat X^λ een verzameling is in $\mathbb{H}$. We mogen dus aannemen dat X een standaard verzameling is.

Omdat X een standaard verzameling is, bestaat er een $W \in \mathbb{WF}$ zodat ${}^*W = X$. Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is, is W^λ een verzameling in $\mathbb{WF}$ en dus ook in $\mathbb{H}$. W^λ is de verzameling van afbeeldingen van λ naar W, zodat men door middel van $*$-Overdracht kan aantonen dat ${}^*(W^\lambda)$ de verzameling is van de interne afbeeldingen van ${}^*\lambda$ naar ${}^*W = X$. We gaan nu de verzameling ${}^*(W^\lambda)$ surjectief afbeelden op de collectie X^λ.
Kies een willekeurig element $f \in X^\lambda$. Uit Gevolg 2.2.5 halen we dat er een interne functie g bestaat met domein ${}^*\lambda$, $g({}^*\xi) = f(\xi)$ voor alle $\xi \in \lambda$ en waarbij het bereik van g de verzameling X is. g is dus een element van ${}^*(W^\lambda)$. Beschouw nu de volgende formule

$$\Phi(g,f) \quad \equiv \quad \forall\xi(\xi \in \lambda \rightarrow g({}^*\xi) = f(\xi)) \wedge \text{‘}f\textbf{ is functie met domein }\lambda\text{’},$$

waarbij

$$\begin{aligned} \text{‘}f\textbf{ is functie met domein }\lambda\text{’} \quad \equiv \quad & \forall z(z \in f \rightarrow \exists x \exists y(z = (x,y))) \\ \wedge \quad & \forall x[(x \notin \lambda \rightarrow \forall y((x,y) \notin f)) \\ \wedge \quad & (x \in \lambda \rightarrow \exists y \forall z(z = y \leftrightarrow (x,z) \in f))]. \end{aligned}$$

In Φ is $g({}^*\xi) = f(\xi)$ zinvol gedefinieerd, omdat * een goed gedefinieerde (klasse)functie is. Door het Collectie-axioma toe te passen op de formule $\Phi(g,f)$ en de verzameling ${}^*(W^\lambda)$, verkrijgen we een verzameling Y zodat voor alle $g \in {}^*(W^\lambda)$, waarvoor er een f bestaat zodanig dat $\Phi(g,f)$ geldt, er een $f \in Y$ bestaat waarvoor $\Phi(g,f)$ waar is. Merk op dat f uniek bepaald wordt uit g door middel van $\Phi(g,f)$. Daardoor en door onze vorige bemerkingen is $X^\lambda \subseteq Y$, zodat X^λ een verzameling is door het Separatie-axioma toe te passen:

$$X^\lambda = \{f \in Y \mid \text{‘}f\textbf{ is functie met domein }\lambda\textbf{ en bereik }X\text{’}\},$$

waarbij

$$\begin{aligned} \text{‘}f\textbf{ is functie met domein }\lambda\textbf{ en bereik }X\text{’} \quad \equiv \quad & \forall u(u \in f \rightarrow \exists x \exists y(u = (x,y))) \\ \wedge \quad & \forall x[(x \notin \lambda \rightarrow \forall y((x,y) \notin f)) \\ \wedge \quad & (x \in \lambda \rightarrow \exists y(y \in X \wedge \\ & \forall z(z = y \leftrightarrow (x,z) \in f)))]. \end{aligned}$$

(2.) $X^{<\lambda}$ is een verzameling.
Definieer

$$\begin{aligned} \Phi'(\xi,x) \quad & \equiv \quad (x = X^\xi) \\ & \equiv \quad \forall y(y \in x \leftrightarrow y \in X^\xi), \end{aligned}$$

waarbij

$$y \in X^\xi \quad \equiv \quad \text{‘}y\textbf{ is functie met domein }\xi\textbf{ en bereik }X\text{’}$$

Uit (1.) volgt dat voor alle $\xi < \lambda$ er een verzameling x bestaat waarvoor $\Phi'(\xi,x)$ geldt. Door nu het Collectie-axioma toe te passen op deze formule Φ' en op de verzameling λ, verkrijgen we een verzameling Y zodat voor alle ξ in λ geldt dat $X^{\xi} \in Y$. Door het Separatie-axioma is

$$Z := \{y \in Y \mid y = X^{\xi} \wedge \xi < \kappa\}$$

een verzameling. Uit het Unie-axioma volgt dat $X^{<\lambda} = \bigcup Z$ een verzameling is in $\mathbb{H}$.

(3.) $[X]^{\kappa}$ is een verzameling.
Definieer de volgende functie Ψ op X^{κ}:

$$\Psi(f) = range(f), \text{ voor alle } f \in X^{\kappa}.$$

Uit het Vervangingsaxioma volgt dat $range(f)$ goed gedefinieerd is. Ook is $range(\Psi)$ een verzameling omdat X^{κ} een verzameling is. Door de definitie van Ψ bekomen we dat $[X]^{\kappa} \subseteq range(\Psi)$, zodat $[X]^{\kappa}$ een verzameling is indien we het Separatie-axioma toepassen.

(4.) $[X]^{<\kappa}$ is een verzameling.
Elk ordinaalgetal is bijectief met een kardinaalgetal. Zij λ_1 en λ_2 twee ordinaalgetallen die bijectief zijn met eenzelfde kardinaalgetal. Dan zijn de verzamelingen $[X]^{\lambda_1}$ en $[X]^{\lambda_2}$ gelijk. (4.) volgt nu uit (3.) analoog zoals (2.) uit (1.) volgt. $\square$

2.2.2 Omzeiling van het Machtsverzamelingsaxioma

In Paragraaf 2.2.1 wordt gebruik gemaakt van het feit dat de klasse $\mathbb{I}$ aan Extensie voldoet. Het feit dat men alleen naar 'partiële machtsverzamelingen' kijkt staat daar mee in verband. Men kijkt alleen naar de deelverzamelingen van een gegeven verzameling die nodig zijn voor die toepassing. Bijvoorbeeld kan men aantonen dat voor een $H \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, $Borel(\{1, \ldots, H\})$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. $Borel(\{1, \ldots, H\})$ is de kleinste σ-algebra die alle interne deelverzamelingen van $\{1, \ldots, H\}$ bevat. In ZFC zou men dit aantonen door middel van het Machtsverzamelingsaxioma, terwijl men dit in HST zou kunnen aantonen door 'Extensie van $\mathbb{I}$' en door te kijken naar enkel die deelverzamelingen die nodig zijn: men begint te kijken naar de interne deelverzamelingen van $\{1, \ldots, H\}$ en men breidt deze dan uit tot een σ-algebra. (Men werkt van 'binnen naar buiten', terwijl werken met het Machtsverzamelingsaxioma van 'buiten naar binnen' zou zijn.) We verwijzen naar de literatuur (zie paragraaf 2.2 in [8]) voor een concreet bewijs. We bewijzen dit hier niet, omdat dit enerzijds ons niet meer inzicht zou opleveren in het geheel (de voorgaande formulering geeft het idee al helder weer) en anderzijds omdat we het later (zie Hoofdstuk 4) zullen bewijzen op een andere manier.
Zoals eerder gezegd is een andere oplossing voor het Machtsverzamelingsaxioma-probleem, om te proberen het Machtsverzamelingsaxioma toe te voegen aan HST. Meer concreet: men beschouwt deelklassen van $\mathbb{H}$ waarin het Machtsverzamelingsaxioma wel geldt en men beperkt zich dan tot deze deelklassen. Zie Hoofdstuk 4 voor een verdere uiteenzetting.

2.3 Toepassingen

Deze paragraaf zal aantonen dat werken in HST en de modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse op elkaar lijken. We geven een overzicht van stellingen, waarbij we niet alles bewijzen aangezien sterk lijkt op de modeltheoretische benadering van niet-standaard analyse.
$\mathbb{R}$ is een verzameling in $\mathbb{WF}$ waarop bewerkingen, zoals $+, \times, <, x^y$ bestaan. We kunnen de *-uitbreidingen van deze bewerkingen beschouwen op $^*\mathbb{R}$. Net zoals modeltheoretisch het geval is, noteren we $^* <$ als $<$, $^*+$ als $+$, enzovoort. Door middel van $*$-Overdracht kan men bijvoorbeeld aantonen dat $^*(x+y) = {}^*x + {}^*y$ voor $x, y \in \mathbb{R}$.
De elementen van $^*\mathbb{R}$ worden de *hyperreële* of *$*$-reële* getallen genoemd, terwijl de elementen van $\mathbb{R}$ de reële getallen worden genoemd. De afbeelding $^* : x \mapsto {}^*x$ is een elementaire inbedding van $\mathbb{R}$ naar $^*\mathbb{R}$. Met de taal $\mathcal{L}_0$ betekent dit net dat het Overdrachtsprincipe geldig is. (In feite is dit een gevolg uit Stelling 2.1.4.)

We wensen $^*\mathbb{R}$ te bestuderen vanuit het HST-universum $\mathbb{H}$.

2.3.1 Stelling. *$^*\mathbb{R}$ is standaard groot gesatureerd. Dit betekent dat indien $\mathcal{F}$ een verzameling van standaard grootte is, bestaande uit interne deelverzamelingen van $^*\mathbb{R}$, die voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap, dat dan $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Bewijs. Dit volgt uit Stelling 1.3.47. □

2.3.2 Definitie. Een hyperreëel getal $x \in {}^*\mathbb{R}$ wordt

1. **infinitesimaal** genoemd, indien $|x| < \varepsilon$ voor alle standaard hyperreële getallen $\varepsilon > 0$,
2. **begrensd** genoemd, indien $|x| < C$ voor een zeker standaard hyperreëel getal $C > 0$.
3. **onbegrensd** genoemd, indien $|x| > C$ voor alle standaard hyperreële getallen $C > 0$.

2.3.3 Definitie. Stel $x \approx y$ als $x - y$ een infinitesimaal is.

Men kan aantonen dat $\approx$ een equivalentierelatie is. Het bestaan van infinitesimalen volgt uit Saturatie:

2.3.4 Stelling. *In $^*\mathbb{R}$ bestaan zeker niet-nul infinitesimalen en onbegrensde hyperreële getallen.*

Bewijs. Definieer voor $n \in \mathbb{N}$, $X_n := \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{n}\}$. Omdat $\mathbb{I}$ een ZFC-universum is, is X_n een niet-ledige interne verzameling. $X := \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ is een verzameling van standaard grootte. (Dat X een verzameling is in $\mathbb{H}$ kan net zoals vroeger bewezen worden door het Collectie- en Separatie-axioma toe te passen.) Ook voldoet X aan de eindige doorsnede eigenschap, zodat uit Saturatie volgt dat $\bigcap X \neq \emptyset$, zodat er een niet-nul infinitesimaal bestaat.
De inverse van zo'n infinitesimaal is een onbegrensd hyperreëel getal. □

2.3.5 Stelling. *Voor elk begrensd hyperreëel getal $x \in {}^*\mathbb{R}$ bestaat er een uniek reëel getal $a \in \mathbb{R}$ zodat $x \approx {}^*a$. Omgekeerd, indien er een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $x \approx {}^*a$, is x begrensd.*

Bewijs. Stel dat x een begrensd hyperreëel getal is. Uit Stelling 2.1.2 volgt dat er een $b \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $|x| < {}^*b$. Definieer nu

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \mid {}^*q < x\}.$$

We weten dat $A \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{WF}$, zodat $A \in \mathbb{WF}$. A is zeker niet-ledig (aangezien $\lfloor -b \rfloor \in A$) en begrensd naar boven, zodat in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$ het supremum $a = sup(A)$ bestaat. Omdat $\mathbb{Q}$ de rationale getallen in $\mathbb{WF}$ zijn, is $a \in \mathbb{R}$. We wensen aan te tonen dat $x \approx {}^*a$. Stel dat $|x - {}^*a|$ geen infinitesimaal is, zodat er een positief reëel getal ε bestaat zodat $|x - {}^*a| > {}^*\varepsilon$. Dan is ofwel $x > {}^*(a + \varepsilon)$, ofwel $x < {}^*(a - \varepsilon)$. In het eerste geval kan a niet het supremum zijn van A omdat er tussen a en $a + \varepsilon$ minstens één rationaal getal ligt, een tegenstrijdigheid. In het tweede geval kan a ook niet het supremum zijn van A omdat $a - \varepsilon$ een kleinere bovengrens is van A dan a. We besluiten dat $x \approx {}^*a$.
Om aan te tonen dat a uniek is: stel dat $x \approx {}^*a \approx {}^*b$ ($\approx$ is een equivalentierelatie). Dan is $|{}^*a - {}^*b| < {}^*\varepsilon$ voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}$, zodat $|a - b| < \varepsilon$ voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}$. We besluiten dat $a = b$.
Omgekeerd, stel dat x een hyperreëel getal is waarvoor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ bestaat zodat $x \approx {}^*a$. Dan is $|x - {}^*a| < 1$, zodat $|x| < |{}^*a| + 1$. $|{}^*a| + 1$ is een standaard hyperreëel getal, zodat x een begrensd hyperreëel getal is. $\square$

Het uniek getal a wordt genoteerd als ${}^\circ x$ en wordt het **standaard deel van** x genoemd.

2.3.6 Definitie. Voor elke $x \in {}^*\mathbb{R}$ definiëren we de monade van x als $m(x) := \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid x \approx y\}$.

Wat we dus zien in HST is dat stellingen die geldig zijn in de modeltheoretische benadering, ook geldig zijn in HST.

2.3.1 Principe van interne definitie en overloop

In deze sectie bewijzen we enkele eenvoudige eigenschappen in HST, die ook geldig zijn in de modeltheoretische benadering.

2.3.7 Stelling (Principe van interne definitie)**.** *Stel Y is een verzameling gedefinieerd door een $\in$-formule in $\mathbb{I}$ (interne parameters zijn toegelaten). Dan is Y intern.*

Bewijs. Stel ϕ is een $\in$-formule met interne parameters zodat

$$Y := \{y \in \mathbb{I} \mid \phi^{\text{int}}(y)\}.$$

Wegens Gevolg 1.2.21 bestaat er een standaard, en dus een interne, verzameling S zodat $Y \subseteq S$. Uit Gevolg 1.2.20 volgt dat $Y \in \mathbb{I}$. $\square$

Deze stelling is algemener dan de modeltheoretische versie: daar moet $Y = \{y \in S \mid \phi(y)\}$ van in het begin zijn, alvorens Y intern is. Modeltheoretisch mag ook ϕ enkel begrensde kwantoren bevatten, zodat dan $\phi^{\text{int}}(x)$ equivalent is met $\phi(x)$.

2.3.8 Stelling (Overloop)**.** *Zij A een interne deelverzameling van ${}^*\mathbb{N}$.*

1. *Als A alle natuurlijke getallen bevat, dan reikt A aan de rechterkant tot in de oneindige natuurlijke getallen, met andere woorden: als $\mathbb{N} \subseteq A$, dan bestaat er een oneindig hypernatuurlijk getal ω waarvoor $\{1, 2, \ldots, \omega\} \subseteq A$* ***(Overloop in het oneindige)***

2. *Als A alle oneindige hypernatuurlijke getallen bevat, dan reikt A aan de linkerkant tot in de natuurlijke getallen, met andere woorden: als ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \subseteq A$, dan bestaat er een natuurlijk getal m waarvoor $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \geq m\} \subseteq A$* ***(Overloop in het eindige)***

Bewijs. (1.) Indien $A = {}^*\mathbb{N}$ dan is dit triviaal. Stel dus dat $A \subsetneq {}^*\mathbb{N}$. ${}^*\mathbb{N}$ is de verzameling van de natuurlijke getallen ten opzichte van het ZFC-universum $\mathbb{I}$. Stel dat $\Phi(\mathbb{N})$ de formule voorstelt die zegt dat voor elke niet-ledige deelverzameling X van $\mathbb{N}$, die 0 bevat en die verschillend is van $\mathbb{N}$, er een element $k \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\{0, \ldots, k\} \subseteq X$ en $(k+1) \notin X$.

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbb{N}) \quad \equiv \quad & \forall X((\forall x(x \in X \to x \in \mathbb{N}) \wedge 0 \in X \wedge X \neq \mathbb{N}) \\ & \to \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge (k+1) \notin X \wedge \forall y(y \leq k \to k \in X)))\end{aligned}$$

$\Phi^{\text{wf}}(\mathbb{N})$ is een ware uitspraak zodat uit $*$-Overdracht volgt dat $\Phi^{\text{int}}({}^*\mathbb{N})$ geldt. A is een interne deelverzameling van ${}^*\mathbb{N}$ die 0 bevat en die verschillend is van ${}^*\mathbb{N}$, zodat er een $k \in {}^*\mathbb{N}$ bestaat waarvoor $\{0, 1, \ldots, k\} \subseteq A$ en $k+1 \notin A$. Omdat $\mathbb{N} \subseteq A$, geldt zeker dat $k \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

(2.) Indien $A = {}^*\mathbb{N}$ dan is dit triviaal. Stel dus dat $A \subsetneq {}^*\mathbb{N}$. ${}^*\mathbb{N}\backslash A$ is een interne, niet-ledige deelverzameling van $\mathbb{N}$, zodat ${}^*\mathbb{N}\backslash A$ naar boven begrensd is door elk oneindig hypernatuurlijk getal. Stel dat $\Psi(\mathbb{N})$ de formule voorstelt die zegt dat elke naar boven begrensde niet-ledige deelverzameling van $\mathbb{N}$ een grootste element heeft. Dan is $\Psi^{\text{wf}}(\mathbb{N})$ een ware uitspraak, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat elke naar boven begrensde niet-ledige interne deelverzameling van ${}^*\mathbb{N}$ een grootste element heeft. Hieruit volgt dat ${}^*\mathbb{N}\backslash A$ een grootste element $k \in {}^*\mathbb{N}\backslash A \subseteq \mathbb{N}$ heeft. Als $n > k$, dan is $n \notin {}^*\mathbb{N}\backslash A$, zodat $n \in A$. $\square$

Opwaartse overloop zegt dat indien een (interne) eigenschap geldig is voor alle eindige natuurlijke getallen, er zeker een oneindig hypernatuurlijk getal bestaat waarvoor die eigenschap ook geldig is. Analoog voor neerwaartse overloop.

2.3.2 Niet-standaard karakterisatie van gesloten en compacte verzamelingen

Net zoals modeltheoretisch het geval is, hebben we de volgende stelling. Ook hier geven we geen bewijzen omdat er niet zoveel verschil is met de modeltheoretische versie. Het zou ons niet meer inzicht opleveren in hoe men moet werken in HST.

2.3.9 Stelling. *Stel dat $X \subseteq \mathbb{R}$. Dan is*

1. *X is gesloten $\Leftrightarrow \forall^{wf} a \forall x \in {}^*X(x \approx {}^*a \rightarrow a \in X)$.*
2. *X is compact $\Leftrightarrow (\forall x \in {}^*X)(\exists a \in X)(x \approx {}^*a)$.*

Bewijs. Voor een bewijs in HST verwijzen we naar lemma 2.1.15 in [9]. □

2.3.3 Functies en rijen

We kunnen ook niet-standaard versies van functies en rijen definiëren in HST, net zoals modeltheoretisch het geval is. Omdat de meeste stellingen goed lijken op de modeltheoretische versie, geven we geen bewijzen in dit onderdeel maar verwijzen we naar de literatuur, bijvoorbeeld [9].

Een rij in $\mathbb{R}$ is een speciale functie: het is een afbeelding van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$ en wordt meestal genoteerd als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Een $*$-rij is een afbeelding van ${}^*\mathbb{N}$ naar ${}^*\mathbb{R}$. Een gewone rij behoort altijd tot $\mathbb{WF}$, zodat deze rijen een niet-standaard versie hebben die wordt genoteerd als $({}^*x_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$. Deze nieuwe rijen zijn $*$-rijen. Omwille van $*$-Overdracht en omdat ${}^*n = n$ voor $n \in \mathbb{N}$, is ${}^*x_n = {}^*(x_n)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Deze nieuwe $*$-rijen zijn dus uitbreidingen van de oorspronkelijke rij.

2.3.10 Stelling. *Stel $x \in \mathbb{R}$ en $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$. Dan is*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \forall n \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}({}^*x_n \approx {}^*x).$$

Het linkerlid is bekeken in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$, maar dit heeft dezelfde betekenis in $\mathbb{H}$.

2.3.11 Stelling. *Stel dat $a, b \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en a een ophopingspunt van $dom(f)$. Dan is*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \forall x \in {}^*\mathbb{R}(x \approx {}^*a \rightarrow {}^*f(x) \approx {}^*b).$$

Hierbij is ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ het beeld van f onder *.

2.3.12 Stelling. *Stel dat $X \subseteq \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Dan is*

1. *f is continu in X (in $\mathbb{WF}$) $\Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in {}^*X)({}^*x \approx y \rightarrow {}^*f({}^*x) \approx {}^*f(y))$.*
2. *f is uniform continu in X (in $\mathbb{WF}$) $\Leftrightarrow (\forall x \in {}^*X)(\forall y \in {}^*X)(x \approx y \rightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y))$.*

2.3.13 Gevolg (Heine)**.** *Een continue functie op een compacte verzameling van reële getallen is uniform continu.*

Bewijs. Stel dat f een continue functie is op de compacte verzameling $X \subseteq \mathbb{R}$. Kies twee willekeurige elementen $x, y \in {}^*X$ waarvoor $x \approx y$. Omdat X compact is, bestaat er een x' en een y' in X waarvoor geldt dat $x \approx x'$ en $y \approx y'$. Omdat f continu is, is

$$f(x) \approx f(x') \approx f(y') \approx f(y).$$

$\square$

2.3.14 Stelling. *Stel dat $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ een functie en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van functies van X naar $\mathbb{R}$. Dan is*

$$f_n \to f \textit{ uniform op } X \textit{ (in } \mathbb{WF}\textit{)} \Longleftrightarrow (\forall n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N})(\forall x \in {}^*X)({}^*f_n(x) \approx {}^*f(x)).$$

2.3.15 Gevolg. *Stel dat $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ een functie en $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van continue functies van X naar $\mathbb{R}$. Stel dat $f_n \to f$ uniform op X. Dan is f continu op X.*

Voor het bewijs van de vorige stelling hebben we Robinson's lemma nodig. Hiervoor verwijzen naar de literatuur, bijvoorbeeld [9].

Er bestaat natuurlijk veel meer dan reële analyse in $\mathbb{R}$. Men kan de noties van schaduwen, equivalentes, quotiënten, topologieën, enzovoort ook definiëren in HST. Zie [9] voor een verdere uiteenzetting.

2.3.4 Loeb-maten

De Loeb-maat is een constructie van een maat die externe verzamelingen nodig heeft.

2.3.16 Definitie. Zij $H \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ een hypernatuurlijk getal. Zij $\mathcal{H} = \{1, \ldots, H\}$ en zij $\mathcal{A}$ een interne algebra op $\mathcal{H}$, dat wil zeggen een interne verzameling van deelverzamelingen van $\mathcal{H}$ die $\emptyset$ bevat en gesloten is onder complement en eindige unie.[6] Zij $\mu : \mathcal{A} \to {}^*[0,1]$ een interne, eindig additieve afbeelding. (Dit betekent dat $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$ indien $X, Y \in \mathcal{A}$ en disjunct zijn.)
Zij nu $X \subseteq \mathcal{H}$ willekeurig. Dan noemen we X **Loeb-meetbaar** of $L\mu$-**meetbaar** indien

$$\sup\{{}^\circ\mu(Y) \mid Y \subseteq X \text{ en } Y \in \mathcal{A}\} = \inf\{{}^\circ\mu(Y) \mid X \subseteq Y \text{ en } Y \in \mathcal{A}\}. \tag{2.1}$$

De **Loeb-maat** $L\mu(X)$ van X is gelijk aan de waarde van gelijkheid (2.1) en is een element van $[0,1]$, waarbij $[0,1]$ een interval is bekeken ten opzichte van $\mathbb{R}$. Definieer $\mathcal{L}(\mu)$ als de klasse van alle $L\mu$-meetbare verzamelingen.

Het is eenvoudig in te zien dat elke $X \in \mathcal{A}$ Loeb-meetbaar is met $L\mu(X) = {}^\circ\mu(X)$. $\mathcal{L}(\mu)$ is niet altijd een verzameling in HST: het is te groot om een verzameling te zijn. Later zullen we hiervan een voorbeeld zien. Algemeen kan men aantonen dat $\mathcal{L}(\mu)$ een σ-algebra is. Eerst hebben we enkele algemene definities nodig.

[6] Bijvoorbeeld is $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{H})$ een interne algebra.

2.3.17 Definitie. Een **σ-algebra van deelverzamelingen van** X is een verzameling (algemener mogen we een klasse nemen) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ met de volgende eigenschappen:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Als $A \in \mathcal{A}$, dan ook $X \backslash A = A' \in \mathcal{A}$.
3. Is $A_1, A_2, ...$ een rij in $\mathcal{A}$, dan ook $A_1 \cup A_2 \cup ... \in \mathcal{A}$.

2.3.18 Definitie. Een **maat** is een premaat op een σ-algebra. Voluit betekent dit dat, als $\mathcal{A}$ een σ-algebra van deelverzamelingen van X is, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ een maat op $\mathcal{A}$ is als de volgende eigenschappen gelden:

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. ν is **σ-additief**, d.w.z.: is $A_1, A_2, ...$ een rij van onderling disjuncte elementen uit $\mathcal{A}$, dan is $\nu(A_1 \cup A_2 \cup ...) = \nu(A_1) + \nu(A_2) + ...$ (De gelijkheid mag $+\infty = +\infty$ zijn.)

2.3.19 Definitie. Een **maatruimte** is een geordend drietal $(X, \mathcal{A}, \nu)$ bestaande uit een niet-ledige verzameling X, een σ-algebra $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X, en een maat ν op $\mathcal{A}$.

Deze definities stellen ons in staat om de volgende stelling te formuleren. Aangezien het bewijs ongeveer hetzelfde is als bij de modeltheoretische versie, verwijzen we naar de literatuur voor een bewijs. (Zie [5] voor de modeltheoretische versie.)

2.3.20 Stelling.

1. *$\mathcal{L}(\mu)$ is een σ-algebra op $\mathcal{H}$.*
2. *$L\mu$ is een maat op $\mathcal{L}(\mu)$ naar $\mathbb{R}$.*
3. *$(\mathcal{H}, \mathcal{L}(\mu), L\mu)$ is een maatruimte.*

Nu volgt het meest elementaire voorbeeld. Zij h een element van ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ en zij $\mathcal{H} = \{1, \ldots, h\}$. Elke *interne* deelverzameling X van $\mathcal{H}$ heeft een zeker aantal elementen $|X|$ in $\mathbb{I}$. Definieer de telmaat μ van X:

$$\mu(X) := \frac{|X|}{h}.$$

μ is een interne, eindig additieve afbeelding op de interne algebra $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{H})$ naar ${}^*[0, 1]$. μ wordt de telmaat op $\mathcal{H}$ genoemd. Voor deze interne, eindig additieve maat is de σ-algebra $\mathcal{L}(\mu)$ geen verzameling in HST. Voor de eenvoud nemen we $h = \omega^2$ met $\omega \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

2.3.21 Stelling. *Voor de telmaat μ op $\mathcal{H} = \{1, \ldots, \omega^2\}$ is $\mathcal{L}(\mu)$ is geen verzameling in $\mathbb{H}$.*

Bewijs. Stel dat $\mathcal{L}(\mu)$ wel een verzameling is in HST. Kies een oneindige interne deelverzameling X van $\mathcal{H}$ zodat $\mu(X) \approx 0$. We kunnen bijvoorbeeld $X = \{1, \ldots, \omega\}$ nemen, want dan is X intern en $\mu(X) = \frac{1}{\omega} \approx 0$. Trivialerwijs is X een Loeb-meetbare verzameling. Zij Y een willekeurige deelverzameling van X. Dan is

$$\sup\{{}^\circ\mu(Z) \mid Z \subseteq Y \text{ en } Z \in \mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{H})\} \leq {}^\circ\mu(X) = 0,$$

waarbij we gebruik maken van het feit dat μ monotoon[7] is en dat indien $x \leq y$, dat dan ${}^\circ x \leq {}^\circ y$ voor x, y begrensde hyperreële getallen in ${}^*\mathbb{R}$. Ook is

$$\inf\{{}^\circ\mu(Z) \mid Y \subseteq Z \text{ en } Z \in \mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{H})\} = 0,$$

zodat Y een Loeb-meetbare verzameling is met Loeb-maat 0. We besluiten dat $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{L}(\mu)$. Omdat $\mathcal{L}(\mu)$ een verzameling is in $\mathbb{H}$, kunnen we afleiden door gebruik te maken van het Separatie-axioma dat $\mathcal{P}(X)$ ook een verzameling is in $\mathbb{H}$. Dit is echter in strijd met de paradox van Hrbaček omdat X een oneindige interne verzameling is. □

Dat $\mathcal{L}(\mu)$ geen verzameling is in $\mathbb{H}$ is niet zo erg. Het is een klasse, zodat men kan werken met de formule $\phi(x)$ die uitdrukt dat $x \in \mathcal{L}(\mu)$. Anderzijds kan men Loeb-meetbare verzamelingen dicht genoeg benaderen door Borelverzamelingen en de collectie van de Boreldeelverzamelingen van $\mathcal{H}$ is wel een verzameling in $\mathbb{H}$ (zie Hoofdstuk 4 of zie Stelling 9.3.9 in [9]). In HST moet men soms werken met formules/klassen in plaats van met verzamelingen, wat filosofisch een nadeel kan zijn.

[7]Dit betekent dat $\mu(X) \leq \mu(Y)$ indien $X \subseteq Y$.

Hoofdstuk 3

Het construeerbare universum en metawiskundige eigenschappen van HST

Dit hoofdstuk heeft als doel een kort overzicht te geven van enkele metawiskundige eigenschappen in HST. Bijvoorbeeld willen we het construeerbare universum $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ opbouwen. Dit hoofdstuk is een uitbreiding en zit niet in het hoofddoel van deze masterproef, zodat niet alle stellingen in dit hoofdstuk worden bewezen. Toch hebben we getracht een zo goed mogelijk intuïtief beeld weer te geven.

3.1 Het construeerbare universum

In deze paragraaf geven we weer hoe het construeerbare universum wordt opgebouwd. Het construeerbare universum $\mathbb{L}$ in ZFC is het universum dat gebouwd kan worden op $\emptyset$. Daarmee bedoelen we dat we er een hiërachie L_α bestaat zodat

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\xi+1} &= \{\{y \in L_\xi \mid \phi(y, z_1, \ldots, z_n) \text{ is waar in } (L_\xi, \in)\} \mid \\ &\quad\ \phi \text{ een } \in\text{-formule en } z_1, \ldots, z_n \in L_\xi\} \\ L_\lambda &= \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi, \text{ voor een limietordinaal } \lambda \end{aligned}$$

en

$$\mathbb{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} L_\alpha.$$

$L_{\xi+1}$ wordt in feite 'gebouwd' op L_ξ door middel van $\in$-formules. $\mathbb{L}$ wordt het construeerbare universum genoemd en voldoet aan de axioma's van ZFC, maar is niet noodzakelijk gelijk aan het volledige universum van ZFC. Het axioma dat zegt dat $\mathbb{L}$ het volledige universum is, kan consistent aan ZFC toegevoegd worden. We wensen zo'n constructie ook uit te voeren in HST. Om deze constructie formeel te ondersteunen hebben we, net zoals in ZFC, de notie van een goed-gefundeerde boom nodig.

3.1.1 Definitie. Definieer Seq als de klasse van alle eindige rijen $(a_1, \ldots, a_n)$ met a_i willekeurige verzamelingen. (Merk op dat we een rij zien als een functie.)

Indien we enkel elementen a_i uit $\mathbb{I}$ beschouwen, dan is $Seq \subseteq \mathbb{I}$: een eindige rij, bestaande uit interne verzamelingen, is een eindige deelverzameling van $\mathbb{I}$ en dus zelf ook intern (zie Hulpstelling 1.4.1).

3.1.2 Definitie. Zij $t \in Seq$ en a een willekeurige verzameling. $t\hat{\ }a$ is de eindige rij in Seq ontstaan door a aan de rechterkant van t te plakken. $a\hat{\ }t$ is de eindige rij in Seq ontstaan door a aan de linkerkant van t te plakken. Algemeen is voor twee rijen s en t uit Seq, $s\hat{\ }t$ de eindige rij ontstaan door t aan s te plakken aan de rechterkant. Alles is goed gedefinieerd in HST, aangezien het eindige verzamelingen zijn.

Omdat rijen kunnen beschouwd worden als functies en functies worden geïdentificeerd met hun grafiek, bestaat er een notie van $t' \subseteq t$ voor elke t' en t in Seq. Dit betekent dat t een uitbreiding is van t'. Bijvoorbeeld is $(a) \subseteq (a, b, c)$, maar $(b) \not\subseteq (a, b, c)$ indien $a \neq b$. Dit laatste geldt omdat $(b) = \{(1, b)\}$, maar $(a, b, c) = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.

3.1.3 Definitie. Een **boom** is een niet-ledige deelverzameling T van Seq zodanig dat voor elke $t, t' \in Seq$ met $t' \subseteq t$, geldt dat als $t \in T$, dan ook $t' \in T$.

Een boom bevat dus zeker de ledige rij Λ. We gaan er van uit dat de lezer al de intuïtieve notie van een boom kent.

3.1.4 Definitie. Zij T een boom.

1. Definieer $\mathbf{Max}(T)$ als de verzameling van alle $\subseteq$-maximale elementen van T. (Intuïtief komt dit overeen met de bladeren van de boom T.)

2. Als $t \in T$, definieer $\mathbf{Succ}_T(t) = \{a \mid t\hat{\ }a \in T\}$.

3. Definieer $\mathbf{Min}(T)$ als de verzameling $\mathrm{Succ}_T(\Lambda)$. $\mathrm{Min}(T)$ is dus gelijk aan $\{a \mid (a) \in T\}$. (Intuïtief komt dit overeen met de toppen net boven de wortel Λ van T.)

4. T is **goed-gefundeerd** als elke niet-ledige deelverzameling $T' \subseteq T$ een $\subseteq$-*maximaal* element bevat (in T').

Een boom T is goed-gefundeerd als en slechts als de relatie $t \prec t' \Leftrightarrow t' \subsetneq t$ op T goed-gefundeerd is. Indien een boom goed-gefundeerd is, kunnen we de noties van goed-gefundeerde inductie en recursie gebruiken. Hieruit volgt dat we op een geldige wijze een functie f op T kunnen definiëren zodat $f(t)$ op een bepaalde manier afhangt van $f(t\hat{\ }a)$ (dit kan analoog bewezen worden als in Gevolg 1.2.18 en Stelling 1.3.25). De volgende definitie bestaat dus.

3.1.5 Definitie. Zij T een goed-gefundeerde boom. Definieer de **rang van** t **in** T voor iedere $t \in T$ als een ordinaalgetal $|t|_T$ zodat $|t|_T = \sup_{t\hat{}a \in T} |t\hat{}a|_T + 1 = \sup(\{|t\hat{}a|_T \mid t\hat{}a \in T\}) + 1$. Definieer de **hoogte van** T als $|T| = |\Lambda|_T$.

Merk op dat we $\sup(\emptyset) = 0$ nemen, zodat $|t|_T = 0$ voor $t \in \mathrm{Max}(T)$. Zij t een top zodanig dat alle $t\hat{}a \in \mathrm{Max}(T)$ voor alle $a \in \mathrm{Succ}_T(t)$, maar $t \notin \mathrm{Max}(T)$. Dan is $|t|_T = \sup(\{|t\hat{}a|_T \mid t\hat{}a \in T\}) + 1 = \sup(\{0 \mid t\hat{}a \in T\}) + 1 = 0 + 1 = 1$.
Nu zullen we het idee van constructieve universum, beter gezegd van de constructie, formaliseren.

3.1.6 Definitie. Een A-**code**[1] is een functie $x : D \to \mathbb{I}$ met domein $D \subseteq Seq$ een verzameling, bestaande uit paarsgewijze $\subseteq$-onvergelijkbare elementen, zodat $T_x = \{t \in Seq \mid \exists t'(t' \in dom(x) \wedge t \subseteq t')\}$ een goed-gefundeerde boom is.

Hieruit volgt eenvoudig dat $D = \mathrm{Max}(T_x)$, zodat x een afbeelding is van $\mathrm{Max}(T_x)$ naar $\mathbb{I}$. Het is st-$\in$-uitdrukbaar of een verzameling x een A-code is of niet. Met elke A-code x associëren we een functie F_x.

3.1.7 Definitie. Zij x een A-code. Definieer voor alle $t \in T = T_x$

$$\begin{aligned} F_x(t) &= x(t), \text{ indien } t \in \mathrm{Max}(T) \\ F_x(t) &= \{F_x(t\hat{}a) \mid t\hat{}a \in T\}, \text{ indien } t \notin \mathrm{Max}(T). \end{aligned}$$

Dat F_x goed gedefinieerd is, kan men weeral aantonen via de noties van goed-gefundeerde inductie en recursie. Voor elke $t \in T$ is $F_x(t)$ dus een verzameling.

We zien dat indien $|t|_T = 0$, dat dan $F_x(t) \in \mathbb{I}$. Indien $|t|_T = 1$, is $F_x(t)$ een deelverzameling van $\mathbb{I}$ die niet noodzakelijk intern is. We krijgen een eerste laag van externe verzamelingen op $\mathbb{I}$. Indien men verder gaat naar de top van de boom toe, worden er meer en meer verzamelingen geconstrueerd op het voorgaande niveau. We zien de notie van het construeerbare universum ontstaan.

3.1.8 Definitie. Zij x een A-code. Definieer $A_x := F_x(\Lambda)$. Dit wordt de verzameling genoemd gecodeerd door x.

Indien x een A-code is, kan men een restrictie $x_{/t}$ definiëren.

3.1.9 Voorbeeld. Zij x een A-code en kies een willekeurig element $t \in T = T_x$. Definieer $T_{/t} = \{s \mid t\hat{}s \in T\}$. Definieer $x_{/t}(s) = x(t\hat{}s)$ voor elke $s \in \mathrm{Max}(T_{/t})$. Men ziet vrij eenvoudig in dat $x_{/t}$ een A-code is, waarvoor $T_{(x_{/t})} = T_{/t}$ en $A_{(x_{/t})} = F_x(t)$.

De vraag die men zich kan stellen, is of er voor elke verzameling x een A-code ${}^a x$ bestaat zodat $A_{{}^a x} = x$. Dit wordt besproken in het volgende voorbeeld.

[1] A staat voor 'assembling'

3.1.10 Voorbeeld. Zij x een interne verzameling. Definieer de A-code ${}^a x$ als de afbeelding $\{(\Lambda, x)\}$. Het domein D van ${}^a x$ is gelijk aan de verzameling Λ, zodat $T_{{}^a x}$ gelijk is aan $\{\Lambda\}$. De corresponderende $A_{{}^a x}$ is gelijk aan x zelf.
Zij x nu een niet-interne verzameling. Definieer $T_{{}^a x}$ als de verzameling bestaande uit Λ en alle eindige rijen $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, zodat $n \in \mathbb{N}$, $x \ni y_0 \ni y_1 \ni \cdots \ni y_n$, $y_j \notin \mathbb{I}$ voor alle $j = 0, \ldots, n-1$. (y_n kan ofwel intern ofwel niet-intern zijn.) $T_{{}^a x}$ is zeker een verzameling in $\mathbb{H}$, aangezien elke y_i van zo'n rij tot de transitieve sluiting $Tc(x)$ van x behoort. Een element $t \neq \Lambda$ van $T_{{}^a x}$ is dus een element van $Tc(x)^{<\omega}$ (,$Tc(x)^{<\omega}$ is een verzameling door Stelling 1.3.45,) zodat $T_{{}^a x}$ een verzameling is door het axioma Separatie.
Trivialerwijs is $T_{{}^a x}$ een boom en $\text{Max}(T_{{}^a x})$ bestaat uit alle rijen $t = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, zodat $y_n \in \mathbb{I}$. Definieer voor elke $t \in \text{Max}(T_{{}^a x})$, ${}^a x(t) := y_n$. We wensen aan te tonen dat ${}^a x$ een A-code is met $A_{{}^a x} = x$.

3.1.11 Hulpstelling. *Zij x een niet-interne verzameling. Dan is $T_{{}^a x}$ een goed-gefundeerde boom, ${}^a x$ een A-code en $A_{{}^a x} = x$. Bovendien is $F_{{}^a x}(t) = y_n$ voor elke $t = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in T_{{}^a x}$, $t \neq \Lambda$.*

Bewijs. Indien $T_{{}^a x}$ geen goed-gefundeerde boom is, bestaat er een deelverzameling T' van $T_{{}^a x}$ die geen $\subseteq$-maximaal element bevat. Door toepassing van het axioma Afhankelijke Keuze op de relatie $\subseteq$, bekeken op de verzameling T', verkrijgen we een oneindige rij $y_0 \ni y_1 \ni \ldots$ zodat $y_i \notin \mathbb{I}$. Dit is in strijd met het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$ in HST.
Definieer nu $T'_{{}^a x}$ als $\{t' \in \mathit{Seq} \mid \exists t \in \mathit{dom}({}^a x)(t' \subseteq t)\}$. We wensen aan te tonen dat $T_{{}^a x} = T'_{{}^a x}$, zodat we kunnen besluiten dat ${}^a x$ een A-code is. De inclusie $T_{{}^a x} \supseteq T'_{{}^a x}$ is triviaal. Omgekeerd, zij t een rij $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, zodat $n \in \mathbb{N}$, $x \ni y_0 \ni y_1 \ni \cdots \ni y_n$, $y_j \notin \mathbb{I}$ voor alle $j = 0, \ldots, n-1$. We wensen aan te tonen dat er een $t' \in \text{Max}(T_{{}^a x})$ bestaat zodat $t \subseteq t'$. Als $y_n \in \mathbb{I}$, dan is dit triviaal, want dan kunnen we $t' = t$ nemen. Stel dat $y_n \notin \mathbb{I}$. Dan bestaat er, wegens het Regulariteitsaxioma over $\mathbb{I}$, een verzameling, noem die y'_n, zodat $y'_n \in y_n$ en $y'_n \cap y_n \subseteq \mathbb{I}$. Kies een willekeurige $y_{n+1} \in y'_n \cap y_n$, zodat we t' gelijk aan $(y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ kunnen nemen. We kunnen besluiten dat ${}^a x$ een A-code is.

We tonen nu aan dat $F_{{}^a x}(t) = y_n$ voor elke $t = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in T_{{}^a x}$, $t \neq \Lambda$. Neem voorlopig aan dat het geldt voor alle $t \in \text{Max}(T_{{}^a x})$. Stel dat het niet geldt voor een zekere $t = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in T_{{}^a x}$, $t \neq \Lambda$ en kies t maximaal met deze eigenschap. Zo'n t bestaat aangezien $T_{{}^a x}$ goed-gefundeerd is. t is zeker geen element van $\text{Max}(T_{{}^a x})$, omdat we aangenomen hebben dat het wel geldt voor deze elementen. Omdat t maximaal is, geldt voor elke $a \in \text{Succ}_{T_{{}^a x}}(t)$ dat $F_{{}^a x}(t\hat{\ }a) = a$. Dan is

$$\begin{aligned} F_{{}^a x}(t) &= \{F_{{}^a x}(t\hat{\ }a) \mid a \in \text{Succ}_{T_{{}^a x}}(t)\} \\ &= \{a \mid a \in \text{Succ}_{T_{{}^a x}}(t)\} \\ &= \{a \mid a \in y_n\} \\ &= y_n, \end{aligned}$$

een tegenstrijdigheid. We moeten alleen nog aantonen dat $F_{{}^a x}(t) = y_n$ geldt voor alle $t \in \text{Max}(T_{{}^a x})$. Dit volgt echter triviaal uit de definitie van $F_{{}^a x}(t)$.

We weten dat $F_{{}^a x}(t) = y_n$ voor elke $t = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in T_{{}^a x}$, $t \neq \Lambda$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} F_{{}^a x}(\Lambda) &= \{F_{{}^a x}(a) \mid a \in \ \mathrm{Succ}_{T_{{}^a x}}(\Lambda)\} \\ &= \{a \mid a \in \ \mathrm{Succ}_{T_{{}^a x}}(\Lambda)\} \\ &= \{a \mid a \in x\} \\ &= x. \end{aligned}$$

$A_{{}^a x}$ is dus gelijk aan x. □

Voor elke verzameling x bestaan er verscheidene A-codes y zodat $A_y = x$. Om een zekere uniciteit te verkrijgen definiëren we reguliere codes.

3.1.12 Definitie. Een A-code x is **regulier** als voor elke $t \in T_x$, met $|t|_{T_x} = 1$, geldt dat $F_x(t)$ geen interne verzameling is.

Voor een reguliere A-code met bijhorende boom zijn de toppen net onder de bladeren niet intern. Dit resulteert in het feit dat we al in de eerste stap van de constructie (dit betekent overgaan van de bladeren van de boom naar de toppen net eronder), zeker niet binnen $\mathbb{I}$ blijven. Dit impliceert dat er geen enkele interne verzameling verschijnt op alle hogere niveau's (zie Stelling 5.3.12 in [9]). Dus voor $|t|_T \geq 1$, is $F_x(t) \notin \mathbb{I}$. Ook kan men aantonen dat er voor elke A-code x, een reguliere A-code x' bestaat zodanig dat $A_x = A_{x'}$. (Voor een bewijs zie [9].)

Het idee is nu om het construeerbare universum gelijk aan $\{A_x \mid x \text{ een reguliere } A\text{-code}\}$ te nemen. Uit Voorbeeld 3.1.10 volgt dat deze klasse gelijk is aan $\mathbb{H}$. Er is echter een probleem. We willen een universum construeren op $\mathbb{I}$. Dit doen we in stappen. We beginnen bij de bladeren (elementen van $\mathbb{I}$); dan gaan we een niveau hoger (deelverzamelingen van $\mathbb{I}$, niet noodzakelijk intern);... Dit komt overeen met eerst bomen van hoogte 0 te beschouwen, dan bomen van hoogte 1, enzovoort. Die bomen worden bepaald onze A-codes, maar we willen alleen A-codes gebruiken die we op dat moment al geconstrueerd hebben. Daarom kunnen we geen willekeurige A-codes gebruiken. We zullen ons dus moeten beperken tot een kleiner aantal A-codes.
Indien we enkel zouden werken met interne A-codes, zou dit ons teveel beperken. We zullen A-codes gebruiken die in de eerste laag van externe verzamelingen zitten. Deze laag bestaat uit verzamelingen $x \subseteq \mathbb{I}$ die st-$\in$-definieerbaar zijn in $\mathbb{I}$. We hebben een formele definitie van deze externe verzamelingen nodig.

3.1.13 Definitie. Een E**-code** is een interne functie p met domein $A \times B$, waarbij A en B willekeurige standaard verzamelingen zijn. Als p een E-code is, definieer

$$\begin{aligned} E_p &:= \bigcup_{a \in A \cap \mathbb{S}} \bigcap_{b \in B \cap \mathbb{S}} p(a,b) \\ &= \{x \in \bigcup range(p) \mid \exists^{\mathrm{st}}\, a \in A \forall^{\mathrm{st}}\, b \in B (x \in p(a,b))\}. \end{aligned}$$

Indien p geen E-code is, definieer $E_p = \emptyset$.

Elke E_p is een verzameling in $\mathbb{H}$, door gebruik te maken van het Separatie-axioma.

3.1.14 Definitie. Definieer

$$\mathbb{E} \ := \ \{E_p \mid p \text{ is een } E\text{-code}\} = \{E_p \mid p \in \mathbb{I}\}.$$

Voor een willekeurige E-code p is E_p een deelverzameling van $\mathbb{I}$, maar E_p is niet noodzakelijk intern. $\mathbb{E}$ is in feite een soort van eerste laag van externe verzamelingen op $\mathbb{I}$, waarvoor er een parametrisatie bestaat door interne verzamelingen: $p \mapsto E_p$. Door deze parametrisatie is het zinvol om over A-codes over $\mathbb{E}$ te spreken. Om weer een soort van uniciteit te eisen voor de E-codes, net zoals bij de A-codes, definiëren we volgende definitie.

3.1.15 Definitie. Stel $\mathbf{E}$ is de klasse van alle E-codes p zodat E_p niet intern is of p is de functie $\{(\emptyset \times \emptyset, x)\}$ voor een interne verzameling x. Dit laatste wordt genoteerd als ${}^e x$ en is een E-code zodat $E_{{}^e x} = x$.

Uit de definitie volgt dat $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{I}$. De definitie van $\mathbf{E}$ resulteert in een unieke codering, gebruik makend van E-codes, voor interne verzamelingen x. Dan geldt natuurlijk ook dat

$$\mathbb{E} = \{E_p \mid p \in \mathbf{E}\}.$$

Zoals eerder gezegd is $\mathbb{E}$ een eerste laag van externe verzamelingen op $\mathbb{I}$. We geven dit bewijs niet, aangezien het ons niet zoveel informatie extra oplevert. We verwijzen voor het bewijs naar Stelling 5.2.10 in [9].

3.1.16 Stelling. $\mathbb{E}$ *valt samen met de klasse van alle verzamelingen* $X \subseteq \mathbb{I}$ *st-*$\in$*-definieerbaar in* $\mathbb{I}$. *Bovendien valt* $\mathbb{E}$ *ook samen met* Δ_2^{ss}.

Deze stelling geeft ook de reden waarom we de elementen van Δ_2^{ss} en elementen van $\mathbb{E}$ elementair externe verzamelingen noemen: het zijn de klassen van de eerste laag van externe verzamelingen op $\mathbb{I}$. We hebben nu genoeg informatie om verder te gaan met onze bespreking van het construeerbare universum.

3.1.17 Definitie. Definieer **A'** als de klasse van alle A-codes x zodanig dat $x \in \mathbb{E}$ en definieer **A** als de klasse van alle *reguliere* A-codes in **A'**.

Het voordeel om enkel met deze klasse van A-codes te werken, is dat we tijdens de constructies geen gebruik maken van A-codes die we op dat moment nog niet geconstrueerd hebben. Om dit te funderen hebben we de volgende stelling nodig. We verwijzen voor een bewijs naar stelling 5.4.5 en lemma 5.4.6 in [9].

3.1.18 Stelling. *De klasse* $\boldsymbol{A}$ *is st-*$\in$*-definieerbaar in* $\mathbb{E}$*. Dit betekent dat er een st-*$\in$*-formule* $\phi(x)$ *bestaat zodanig dat* $\phi^{\mathbb{E}}(x)$ *waar is als en slechts als* $x \in \boldsymbol{A}$*. Indien* $x \in \boldsymbol{A}$*, dan zijn* T_x*,* $Max(T_x)$ *en* $Min(T_x)$ *verzamelingen in* $\mathbb{E}$*.*

We zijn eindelijk klaar om het construeerbare universum te definiëren.

3.1.19 Definitie. Definieer $\mathbb{L}[\mathbb{I}] := \{A_x \mid x \in \mathbf{A}\}$. $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ wordt het construeerbare universum genoemd.

In feite construeren we eerst $\mathbb{E}$ op $\mathbb{I}$, waaruit we $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ halen. Men kan aantonen dat $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ aan de axioma's van HST voldoet en zowel $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ als $\mathbb{I}$ vevat zitten in $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$. Bovendien kan men in HST consistent het Constructibiliteitsaxioma toevoegen (dit is het axioma dat zegt '$\mathbb{H} = \mathbb{L}[\mathbb{I}]$'), zodat men er eigenlijk kan vanuit gaan dat men altijd in $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ werkt.

3.2 Metawiskundige eigenschappen van HST

In deze paragraaf geven we een kort overzicht van enkele belangrijke metawiskundige eigenschappen van HST zonder bewijs, aangezien dit ons te ver zou leiden van ons doel. Voor de geïnteresseerde lezer verwijzen we naar de literatuur (bijvoorbeeld [9]), voor een verdere uiteenzetting.

3.2.1 Definitie. Een theorie T wordt **consistent** genoemd indien er een structuur bestaat die voldoet aan de formules/axioma's in T. Een theorie T_1 is equiconsistent met theorie T_2 als T_1 consistent is als en slechts als T_2 consistent is.

3.2.2 Stelling.

1. *HST is equiconsistent met ZFC.*
2. *HST is conservatief: voor elke* $\in$*-formule* Φ *geldt dat ZFC* $\vdash \Phi$ *als en slechts als HST* $\vdash \Phi^{st}$*.*
3. *HST is standaard kern-interpretatie van ZFC:*
   - *Er bestaat een interpretatie* $({}^*\mathcal{V}, {}^*\in, {}^*st)$ *van HST in ZFC (zie Definitie A.0.11), waarbij de interpretatie van* ${}^*\in$*, respectievelijk* ${}^*st$ *overeenkomt met* $\in$*, respectievelijk st.* ${}^*\mathcal{V}$ *moet definieerbaar zijn in de* $\in$*-taal van ZFC.*
   - *Er bestaat een standaard kern-inbedding* ${}^* : \mathcal{V} \to {}^*\mathcal{V}$*, waarbij* $(\mathcal{V}, \in)$ *een ZFC-universa is. Dit betekent dat* $*$ *injectief moet zijn,* $x \in y \Leftrightarrow {}^*x \; {}^*\!\in {}^*y$ *voor alle* $x, y \in \mathcal{V}$ *en* $\mathbb{S}^{{}^*\mathcal{V}} = \{z \in {}^*\mathcal{V} \mid {}^*st(z)\}$ *moet gelijk zijn aan* $\{{}^*x \mid x \in \mathcal{V}\}$*. Bovendien moet deze inbedding ook definieerbaar zijn in de* $\in$*-taal en moet de eigenschappen ervan bewijsbaar zijn in ZFC.*

Conservativiteit zorgt er voor dat bewijsbare waarheden van ZFC kunnen omgezet worden in bewijsbare waarheden in HST. De standaard kern-interpretatie zorgt ervoor dat men het ZFC-universum kan uitbreiden tot een universum van de niet-standaard verzamelingentheorie HST. Dit zegt dus ook iets over onbewijsbare waarheden.
Het HST-universum is zo groot zodat HST niet overal controle over heeft. Indien we een extra voorwaarde opleggen op het universum, dan voldoet HST aan de reducibiliteitseigenschap.

3.2.3 Stelling. *HST samen met het axioma '$\mathbb{H} = \mathbb{L}[\mathbb{I}]$' voldoet aan de reducibiliteitseigenschap: voor elke st-$\in$-formule ϕ bestaat er een $\in$-formule ψ zodanig dat HST $\vdash (\phi \Leftrightarrow \psi^{st})$.*

De reducibiliteitseigenschap zorgt ervoor dat de niet-standaard verzamelingentheorie niets méér zegt over de traditionele wiskunde in de st-$\in$-taal dan dat ook uitdrukbaar is in de $\in$-taal. HST bewijst dus evenveel als ZFC, zelfs als we kijken naar de uitgebreide taal van de niet-standaard verzamelingentheorie. Deze eigenschap zorgt ervoor dat werken in HST niet zover verwijderd is van werken in ZFC.

Hoofdstuk 4

Het Machtsverzamelings- en Keuze-axioma: partieel gesatureerde theorieën

Volgens de paradox van Hrbaček is het Machtsverzamelingsaxioma niet consistent met HST: geen enkele oneindige interne verzameling heeft een machtsverzameling in $\mathbb{H}$. Praktisch gezien kan dit problemen opleveren in enkele toepassingen.

Er zijn een aantal mogelijke oplossingen bekend voor het Machtsverzamelingsaxioma-probleem. Ten eerste kan men proberen om het Machtsverzamelingsaxioma te omzeilen. Een voorbeeld hiervan wordt gegeven in Paragraaf 2.2.1 en algemener wordt dit besproken in Paragraaf 2.2.2. Een andere manier om het Machtsverzamelingsaxioma-probleem op te lossen, is het beschouwen van deelklassen van $\mathbb{H}$ waarin het Machtsverzamelingsaxioma wel geldig is. Dit zal het onderwerp zijn van dit hoofdstuk.

4.1 HST_κ en HST'_κ

HST_κ en HST'_κ zijn twee nieuwe niet-standaard verzamelingentheorieën. De taal is dezelfde als die van HST, maar er komt een extra constante c bij, die we meestal noteren als κ. De twee theorieën ontstaan door een kleine verandering aan de axioma's van HST. Deze nieuwe theorieën zullen het Machtsverzamelingsaxioma bevatten.

In dit hoofdstuk geven we een korte beschrijving van HST_κ en HST'_κ en tonen we aan dat het HST-universum $\mathbb{H}$ deelklassen bevat die voldoen aan HST_κ of HST'_κ. Hieruit volgt dat men eigenlijk altijd in HST kan werken, zelfs als we het Machtsverzamelingsaxioma nodig hebben. We moeten ons alleen maar beperken tot een bepaald deel van $\mathbb{H}$. We beginnen met de korte bespreking van de theorieën HST_κ en HST'_κ.

4.1.1 De axioma's van HST_κ en HST'_κ

In dit onderdeel geven we de axioma's van HST_κ en HST'_κ, zodat we een algemeen beeld hebben van de twee niet-standaard verzamelingentheorieën.

4.1.1 Definitie. Definieer $^0\mathrm{HST}$ als de deeltheorie van HST die enkel de axioma's voor alle verzamelingen van HST en de axioma's voor interne en standaard verzamelingen van HST bevat. $^0\mathrm{HST}$ is dus HST min de axioma's Saturatie, Standaard grootte Keuze en Afhankelijke Keuze.

Een belangrijke opmerking is dat we de klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ hebben gedefinieerd in de theorie $^0\mathrm{HST}$, aangezien we nergens de axioma's Saturatie, Standaard grootte Keuze en Afhankelijke Keuze nodig hebben.[1] Bovendien hebben we bij het bewijs van het bestaan van de bijectie * tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{I}$ enkel gebruik gemaakt van $^0\mathrm{HST}$ en zelfs het ZFC-karakter van $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ blijft ook gelden in $^0\mathrm{HST}$. Bijvoorbeeld zijn de paragrafen 1.2 en 1.3.1 volledig geldig in $^0\mathrm{HST}$, met uitzondering van Stelling 1.2.4. De paragraaf 1.3.2 heeft enkel $^0\mathrm{HST}$ en het axioma Saturatie tot aan $\aleph_0$ nodig[2] ($\aleph_0$ is het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$), om aan te tonen dat $^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \neq \emptyset$.

4.1.2 Definitie. HST_κ is de theorie in de st-$\in$-κ-taal, met κ een constante van de taal, die bestaat uit de volgende axioma's:

- $^0\mathrm{HST}$.
- *'κ' is een oneindig (goed-gefundeerd) kardinaalgetal.*
- *Machtsverzameling*: voor elke verzameling X bestaat de verzameling $\mathcal{P}(X)$.
- *κ-begrensdheid*: elke interne verzameling behoort tot een standaard verzameling van $*$-kardinaliteit $\leq {}^*\kappa$.[3] We weten dat er een afbeelding/formule $\phi(x, y)$ bestaat in $^0\mathrm{HST}$ die uitdrukt dat $^*x = y$. Daardoor kunnen we spreken van $*$-kardinaliteit. $^*\kappa$ is het unieke element die voldoet aan $\phi(\kappa, x)$, zodat het axioma kan geschreven worden als volgende st-$\in$-κ-formule

  $$\forall x \forall y[(x \in y \wedge st(y)) \rightarrow \exists Z(\mathrm{st}\,(Z) \wedge x \in Z \wedge \exists k(\phi(\kappa, k) \wedge {}^*Kard(Z) \leq k))].$$

  Equivalent hiermee is de volgende formule

  $$\forall x \forall y((x \in y \wedge st(y)) \rightarrow \exists Z(\mathrm{wf}\,(Z) \wedge x \in {}^*Z \wedge Kard(Z) \leq \kappa)).$$

[1] Dit wil niet zeggen dat de klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ in $\mathbb{H}$ noodzakelijk gelijk zijn in de corresponderende klassen van $^0\mathrm{HST}$, HST_κ en HST'_κ. We weten alleen dat ze door dezelfde formules kunnen beschreven worden en dat de meeste eigenschappen van die klassen geldig blijven.

[2] Zie verder voor de betekenis 'Saturatie tot aan het kardinaalgetal κ'.

[3] Dit drukt uit dat de klasse van de interne verzamelingen een deel is van $\mathbb{I}_\kappa$ (zie later voor de definitie van $\mathbb{I}_\kappa$).

- *κ-diepe Saturatie*: voor elke standaard grote verzameling X, bestaande uit niet-ledige interne deelverzamelingen van een verzameling ${}^*Y$, met Y een goed gefundeerde verzameling van kardinaliteit $\leq \kappa$, geldt dat indien X $\cap$-gesloten is, dat dan $\bigcap X \neq \emptyset$.
- *2^κ-grootte Keuze*: voor elke verzameling X van kardinaliteit $\leq 2^\kappa$ kunnen we uit al haar elementen één element kiezen en hen samen in een nieuwe verzameling Y stoppen.[4]
- *Afhankelijke Keuze.*

4.1.3 Definitie. HST'_κ is de theorie in de st-$\in$-κ-taal, met κ een constante van de taal, die bestaat uit de volgende axioma's:

- ${}^0\mathrm{HST}$.
- *'κ' is een oneindig (goed-gefundeerd) kardinaalgetal.*
- *Machtsverzameling*: voor elke verzameling X bestaat de verzameling $\mathcal{P}(X)$.
- *κ-begrensdheid*: elke interne verzameling behoort tot een standaard verzameling van $*$-kardinaliteit $\leq {}^*\kappa$.
- *κ-grootte Saturatie*: voor elke $\cap$-gesloten familie X, met de kardinaliteit van $X \leq \kappa$ en X bestaande uit niet-ledige interne verzamelingen, geldt dat $\bigcap X \neq \emptyset$.
- *Elke verzameling is een verzameling van standaard grootte.* Dit betekent dat voor elke verzameling x een functie f en een standaard verzameling X bestaan, zodat $x = \{f(y) \mid y \in X \cap \mathbb{S}\}$.
- *${}^*\kappa$ is een verzameling van standaard grootte via een interne afbeelding.* ${}^*\kappa$ is gelijk aan $\{f(x) \mid x \in X \cap \mathbb{S}\}$ met X een verzameling en f een interne afbeelding.[5]

Modeltheoretische gezien hangen κ-grootte Saturatie en 2^κ-grootte Keuze nauw samen. Bijvoorbeeld komen aftelbare Saturatie en continuum-grootte Keuze typisch voor in niet-standaard analyse. We tonen nu aan dat κ-grootte Saturatie ook geldt in HST_κ. κ-grootte Saturatie volgt dus uit κ-diepe Saturatie. In HST'_κ is de Saturatie nog zwakker dan in HST_κ, maar het voordeel is dat het volledige Keuze-axioma[6] geldt in HST'_κ.

[4] Dit betekent dat het Standaard grootte Keuze-axioma geldt, indien het domein van de Keuze-functie een verzameling van kardinaliteit $\leq 2^\kappa$ is.

[5] Er bestaat een interne bijectie f gedefinieerd op ${}^*\kappa$ zodat $\{f(\xi) \mid \xi \in {}^*\kappa\} \subseteq \mathbb{S}$.

[6] Meer concreet: de volledige Goede-Ordeningsstelling

4.1.4 Stelling. *HST_κ voldoet aan κ-grootte Saturatie.*

Bewijs. [7] Stel X is een $\cap$-gesloten verzameling met $\mathrm{Kard}(X) \leq \kappa$ en X bestaande uit niet-ledige interne verzamelingen. We wensen aan te tonen dat $\bigcap X \neq \emptyset$.

Voor elke interne verzameling $x \in \mathbb{I}$ (hier is $\mathbb{I}$ de klasse van de interne verzamelingen ten opzichte van HST_κ)[8], bestaat er een verzameling $u_x \in \mathbb{WF}$ met kardinaliteit $\leq \kappa$ zodat $x \cap {}^*u_x \neq \emptyset$. Zo'n u_x bestaat. Kies namelijk een willekeurig element $y \in x$. Omdat $\mathbb{I}$ transitief is, is y intern. Voor die verzameling y bestaat er, wegens het axioma κ-begrensdheid, een goed-gefundeerde verzameling u met kardinaliteit $\leq \kappa$, zodat $y \in {}^*u$. Nu is $y \in x \cap {}^*u$, zodat $x \cap {}^*u \neq \emptyset$.

Door gebruik te maken van het Collectie-axioma, verkrijgen we een verzameling Z', zodat voor alle $x \in X$ er een element $z \in Z'$ bestaat met $z \in \mathbb{WF}$, $\mathrm{Kard}(z) \leq \kappa$ en $x \cap {}^*z \neq \emptyset$ (dit wilt niet zeggen dat er juist één zo'n element z bestaat). Definieer nu $Z := \{z \in Z' \mid \mathrm{wf}(z)\}$, zodat $Z \subseteq \mathbb{WF}$ en dus $Z \in \mathbb{WF}$. We willen nu uit de verzameling Z een verzameling Y' krijgen met dezelfde eigenschap en waarvoor $\mathrm{Kard}(Y') \leq \kappa$. Hiervoor hebben we axioma Separatie nodig, dit om de verzameling $Y := \{y \in \mathcal{P}(Z) \mid \exists x \in X \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in \mathbb{WF} \wedge {}^*z \cap x \neq \emptyset))\}$ te definiëren, en moeten we het 2^κ-grootte Keuze-axioma toepassen op Y. Omdat $\mathrm{Kard}(Y) \leq \mathrm{Kard}(X) \leq \kappa$ is dit mogelijk. Het resultaat is een verzameling Y' van de vorm

$$Y' = \{u_x, u_y, \dots\},$$

met $x, y, \dots \in X$ en $x \neq y \neq \dots$ Voor elk element $x \in X$ bestaat een $u_x \in Y'$ met $u_x \in \mathbb{WF}$, $\mathrm{Kard}(u_x) \leq \kappa$ en $x \cap {}^*u_x \neq \emptyset$. Dit sluit niet uit dat u_x gelijk kan zijn aan u_y of dat $x \cap {}^*u_y \neq \emptyset$ voor $x \neq y$ in X, maar we hebben wel dat $\mathrm{Kard}(Y') \leq \mathrm{Kard}(X) \leq \kappa$. Bovendien geldt er dat $Y' \subseteq Z \in \mathbb{WF}$, zodat uit Hulpstelling 1.2.17 volgt dat $Y' \in \mathbb{WF}$. Definieer nu

$$u := \bigcup Y'.$$

u is een goed-gefundeerde verzameling, omdat $\mathbb{WF}$ gesloten is onder unie. Stel nu

$$X' := \{x \cap {}^*u \mid x \in X\}.$$

(Dat X' een verzameling is, kunnen we aantonen door toepassing van het Separatie-axioma: elke $x \cap {}^*u$ is intern en dus een element van $\mathcal{P}_{\mathrm{int}}({}^*u) \overset{\text{Stelling 1.3.4}}{=} {}^*(\mathcal{P}(u))$, een verzameling.) X' is een $\cap$-gesloten verzameling en haar elementen zijn intern, niet-ledig (omdat $x \cap {}^*u \neq \emptyset$, voor alle $x \in X$[9]) en een deelverzameling van ${}^*u$. Om κ-diepe saturatie toe te passen moeten we enkel nog aantonen dat $\mathrm{Kard}(u) \leq \kappa$. Stel dat we κ-diepe Saturatie mogen toepassen. Dan is $\bigcap X' \neq \emptyset$, zodat

$$\emptyset \subsetneq \bigcap X' \subseteq \bigcap X.$$

[7] Het bewijs is gebaseerd op Stelling 6.2.3 uit [9], met persoonlijk inbreng om het te verbeteren.

[8] Het universum van HST_κ is niet gelijk aan het universum van HST

[9] Elke u_x is een deelverzameling van u, zodat $\emptyset \neq x \cap {}^*u_x \subseteq x \cap {}^*u$

We moeten dus nog aantonen dat $\mathrm{Kard}(u) \leq \kappa$. We weten dat $\mathrm{Kard}(Y') \leq \kappa$ en dat alle elementen van Y' ook een kardinaliteit $\leq \kappa$ hebben. Door middel van het 2^κ-grootte Keuze-axioma kan men een injectie leggen van u naar $\kappa \cdot \kappa$. (We geven geen details van een uitwerking, maar dit is een ZFC-bewijs en kan doorgaan in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$.) Bovendien is $\kappa \cdot \kappa$ bijectief met κ. (Zie [10] voor een bewijs dat een oneindige verzameling A bijectief is met $A \times A$ in de theorie ZFC. Omdat $\kappa \in \mathbb{WF}$ en $\mathbb{WF}$ een ZFC-interpretatie is, kunnen we zo'n bijectie in ^{0}HST vinden.) We besluiten dat $\mathrm{Kard}(u) \leq \kappa$. □

De theorie HST_κ bevat minder Saturatie dan HST. HST voldoet aan κ-grootte en κ-diepe Saturatie voor elk kardinaalgetal κ aangezien elk kardinaalgetal een verzameling van standaard grootte is. Een voordeel van de theorie HST_κ ten opzichte van HST is dat het Machtsverzamelingaxioma geldig is. Indien in een bepaalde toepassing alle kardinaliteiten van de optredende verzamelingen begrensd zijn door een zeker kardinaalgetal κ en/of het voldoende is voor het bestuderen van de toepassing om κ-grootte Saturatie te hebben, dan is het gebruik van HST_κ boven HST zeker te overwegen.
Nu heeft HST'_κ ook een voordeel ten opzichte van HST_κ: het volledige Keuze-axioma geldt. Meer concreet: we tonen aan dat elke verzameling x goed-geordend kan worden in HST'_κ.

4.1.5 Stelling. *In HST'_κ kan elke verzameling x goed-geordend worden.*

Bewijs. Dit kan volledig analoog bewezen worden als in Stelling 1.3.41 via (1.) $\Rightarrow$ (2.) $\Rightarrow$ (3.). □

4.2 Interne deeluniversa

Het volgende deel van dit hoofdstuk heeft als doel aan te tonen dat er deeluniversa van $\mathbb{H}$ bestaan die voldoen aan HST_κ en HST'_κ. *We werken vanaf nu terug in* HST. We herhalen eerst nog een notatie.

4.2.1 Notatie. Voor een verzameling of klasse X is $X^{<\omega}$ gelijk aan de verzameling van alle k-tupels van elementen van X met $k \in \mathbb{N}$ willekeurig. $X^{<\omega}$ is dus gelijk aan de collectie van alle functies met domein $\{1, \ldots, k\}$ naar X voor een zekere $k \in \mathbb{N}$. $X^{<\omega}$ is zeker niet-ledig, want het bevat de lege rij/tupel $\Lambda = \emptyset$.

In Stelling 1.3.45 werd bewezen dat $X^{<\omega}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$ voor elke verzameling X.

4.2.2 Definitie. Een klasse $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$ wordt een **intern deeluniversum** genoemd, indien $^*f(x) \in \mathcal{F}$ voor een willekeurige functie $f \in \mathbb{WF}$ en een willekeurig element $x \in \mathcal{F}^{<\omega} \cap \mathrm{dom}^*f$.

Een intern deeluniversum is gesloten onder standaard afbeeldingen. We definiëren een specifiek intern deeluniversum.

4.2.3 Definitie. Stel $X \subseteq \mathbb{I}$, dan is $\mathbb{S}(X)$ de klasse van alle verzamelingen van de vorm ${}^*f(x)$ met $f \in \mathbb{WF}$ een functie en $x \in X^{<\omega} \cap \mathrm{dom}\,{}^*f$. Dus

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(X) &:= \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \text{ een functie en } x \in X^{<\omega} \cap \mathrm{dom}\,{}^*f\} \\ &= \{f(x) \mid f \in \mathbb{S} \text{ een functie en } x \in X^{<\omega} \cap \mathrm{dom} f\}\,. \end{aligned}$$

We noteren $\mathbb{S}[w]$ voor $\mathbb{S}(\{w\})$.

We willen aantonen dat $\mathbb{S}(X)$ een intern deeluniversum is. Dit wordt aangetoond in de volgende stelling.

4.2.4 Stelling.

1. *$\mathbb{S}(X)$ is het kleinste intern deeluniversum dat voldoet aan $X \subseteq \mathbb{S}(X)$.*

2. *Indien $X \subseteq \mathbb{I}$ zodat voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ geldt dat er een functie $h \in \mathbb{WF}$ bestaat met $X \subseteq \mathrm{dom}\,{}^*h$ en $X^n \subseteq \{{}^*h(x) \mid x \in X\}$, dan is*

$$\mathbb{S}(X) = \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \textit{ een functie en } x \in X \cap \mathit{dom}\,{}^*f\}\,.$$

3. *Indien X, Y verzamelingen zijn van $\mathbb{WF}$ met dezelfde kardinaliteit, dan is $\mathbb{S}({}^*X) = \mathbb{S}({}^*Y)$.*

Bewijs. (1.) We tonen aan dat $\mathbb{S}(X)$ een intern deeluniversum is. Zij f een willekeurige functie in $\mathbb{WF}$ en zij $x \in \mathbb{S}(X)^{<\omega} \cap \mathrm{dom}\,{}^*f$. We moeten aantonen dat ${}^*f(x) \in \mathbb{S}(X)$. x is gelijk aan $(x_1, \ldots, x_n)$ met $x_i \in \mathbb{S}(X)$, zodat $x_i = {}^*g_i(y_i)$ met $g_i \in \mathbb{WF}$ een functie en $y_i \in X^{<\omega} \cap \mathrm{dom}({}^*g_i)$ een n_i-tupel. Elke y_i is dus gelijk aan $(y_i^1, \ldots, y_i^{n_i})$. Stel $m = \sum_{k=1}^n n_k$ en definieer voor $i = 1, \ldots, n$ de projectie-functies in $\mathbb{WF}$

$$p_i(z_1, \ldots, z_m) = (z_\alpha, \ldots, z_\beta),$$

waarbij

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\sum_{k=1}^{i-1} n_k\right) + 1 \\ \beta &= \sum_{k=1}^{i} n_k. \end{aligned}$$

Definieer nu in $\mathbb{WF}$ en in de gepaste domeinen

$$h(z_1, \ldots, z_m) := f(g_1(p_1(z_1, \ldots, z_m)), \ldots, g_n(p_n(z_1, \ldots, z_m))).$$

Omdat ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$ (dit volgt uit $*$-Overdracht), is

$${}^*h(u_1, \ldots, u_m) = {}^*f({}^*g_1({}^*p_1(u_1, \ldots, u_m)), \ldots, {}^*g_n({}^*p_n(u_1, \ldots, u_m))),$$

waarbij ${}^*p_i$ de projectie-operatoren zijn in $\mathbb{I}$. We bekomen dat

$$\begin{aligned} {}^*h(y_1^1,\ldots,y_1^{n_1},\ldots,y_n^1,\ldots,y_n^{n_n}) &= {}^*f({}^*g_1(y_1^1,\ldots,y_1^{n_1}),\ldots,{}^*g_n(y_n^1,\ldots,y_n^{n_n})) \\ &= {}^*f(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

We besluiten dat ${}^*f(x) \in \mathbb{S}(X)$. $\mathbb{S}(X)$ is dus een intern deeluniversum. Door ${}^*f$ de identieke functie op $\mathbb{S}$ te kiezen, geldt natuurlijk $X \subseteq \mathbb{S}(X)$. Dat $\mathbb{S}(X)$ het kleinste intern deeluniversum is met deze eigenschap volgt direct uit de definities van $\mathbb{S}(X)$ en van een intern deeluniversum.

(2.) We moeten aantonen dat

$$\begin{aligned} & \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \text{ een functie en } x \in X \cap \operatorname{dom}{}^*f\} \\ = \; & \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \text{ een functie en } x \in X^{<\omega} \cap \operatorname{dom}{}^*f\}. \end{aligned}$$

Het linkerlid zit natuurlijk in het rechterlid. Kies nu een element ${}^*f(x)$ met $f \in \mathbb{WF}$ een functie en $x \in X^n \cap \operatorname{dom}{}^*f$. Uit het gegeven halen we dat er bij dit natuurlijk getal n een functie $h \in \mathbb{WF}$ bestaat met $X \subseteq \operatorname{dom}{}^*h$ en $X^n \subseteq \{{}^*h(x) \mid x \in X\}$, zodat $x = (x_1,\ldots,x_n) = {}^*h(y)$ voor een zekere $y \in X$. We hebben dat ${}^*f(x) = {}^*f({}^*h(y))$, wat een element is van het linkerlid.

(3.) Indien X en Y verzamelingen zijn van $\mathbb{WF}$ met dezelfde kardinaliteit, bestaat er een bijectie g uit $\mathbb{WF}$ tussen X en Y. (Die bijectie zit in $\mathbb{WF}$, omdat $\mathbb{WF}$ $\subseteq$-compleet en transitief is). Indien ${}^*f(x_1,\ldots,x_n)$ een element is van $\mathbb{S}({}^*X)$, dan is ${}^*f(x_1,\ldots,x_n) = {}^*f({}^*g^{-1}(y_1),\ldots,{}^*g^{-1}(y_n))$ een element van $\mathbb{S}({}^*Y)$, met $(y_1,\ldots y_n) = ({}^*g(x_1),\ldots,{}^*g(x_n))$. We besluiten dat $\mathbb{S}({}^*X) \subseteq \mathbb{S}({}^*Y)$. Analoog voor de omgekeerde inclusie. $\square$

Vervolgens enkele algemene eigenschappen van interne deeluniversa. In het bijzonder gelden deze eigenschappen voor $\mathbb{S}(X)$. Eerst hebben we een definitie nodig.

4.2.5 Definitie. Zij $P \subseteq \mathbb{I}$ een verzameling of klasse. $Def^{\mathbb{I}}_{\in,\mathrm{st}}(P)$ is de collectie van alle verzamelingen en klassen $X \subseteq \mathbb{I}$, die st-$\in$-definieerbaar zijn in $\mathbb{I}$ met verzamelingen in P als parameters. Hiermee bedoelen we dat $X \in Def^{\mathbb{I}}_{\in,\mathrm{st}}(P)$ als en slechts als er een st-$\in$-formule ϕ bestaat met parameters in P zodaning dat $\phi^{\mathrm{int}}(x)$ waar is als $x = X$ en omgekeerd.

4.2.6 Stelling. *Stel $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$ is een intern deeluniversum. Dan gelden volgende eigenschappen*

1. $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F}$
2. *$\mathcal{F}$ is een $\in$-elementaire deelstructuur van $\mathbb{I}$, met andere woorden*

$$\Phi^{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \Phi^{\mathbb{I}} = \Phi^{int}, \textit{ voor elke } \in\textit{-formule } \Phi.$$

Φ mag parameters in $\mathcal{F}$ bevatten.

3. *$\mathcal{F}$ voldoet aan het axioma Extensionaliteit, met andere woorden $x \cap \mathcal{F} \neq y \cap \mathcal{F}$ indien $x \neq y$ beiden verzamelingen zijn van $\mathcal{F}$.*

4. *Voor elke eindige verzameling x geldt $x \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow x \in \mathcal{F}$.*

5. *Elke verzameling $x \in \mathbb{I} \cap Def^{\mathbb{I}}_{\in,st}(\mathcal{F})$ behoort tot $\mathcal{F}$.*

6. *Zij ${}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, $z \in \mathcal{F}$ en $z \cap \mathcal{F}$ een aftelbare deelverzameling van $\mathbb{S}$. Dan is z eindig en $z \subseteq \mathcal{F}$.*

Bewijs. (1.) Kies een $x \in \mathbb{S}$. Dan bestaat er een $w \in \mathbb{WF}$ zodat $x = {}^*w$. We weten dat het lege tupel Λ een element is van $\mathcal{F}^{<\omega}$ (zelfs indien $\mathcal{F} = \emptyset$), zodat de functie $f := \{(\Lambda, w)\}$ goed gedefinieerd is. Bovendien is deze functie een element van $\mathbb{WF}$. Uit de definitie van een intern deeluniversum volgt dat $x = {}^*f(\Lambda) \in \mathcal{F}$.

(2.) Dit wordt bewezen door middel van inductie op de complexiteit van de $\in$-formule Φ. Indien Φ atomair is (dit wil zeggen dat er geen $\forall$ en $\exists$ optreden in Φ), is dit triviaal. Indien de stelling geldt voor ϕ_1 en ϕ_2, dan geldt dit ook triviaal voor $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$ en $\neg\phi_1$. We mogen dus aannemen dat $\Phi = \exists x \phi(x)$ of $\Phi = \forall x \phi(x)$ en dat de stelling geldt voor de formule ϕ. Indien we het kunnen bewijzen voor $\exists x \phi(x)$, dan geldt het ook meteen voor $\forall x \phi(x)$, aangezien $\neg\exists x \phi(x) = \forall x \neg\phi(x)$. Stel dus dat $\Phi = \exists x \phi(x)$.

Stel ten eerste dat $\Phi^{\mathcal{F}}$ geldt. Dan bestaat er een element $x \in \mathcal{F}$ zodat $\phi^{\mathcal{F}}$ waar is, zodat uit de inductiehypothese volgt dat $\phi^{\mathbb{I}}$ geldt. Omdat $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, is $x \in \mathbb{I}$ en dus is $\Phi^{\mathbb{I}}$ waar.

Stel nu dat $\Phi^{\mathbb{I}}$ geldt. We wensen aan te tonen dat $\Phi^{\mathcal{F}}$ waar is. Uit het gegeven halen we dat er een element $x \in \mathbb{I}$ bestaat waarvoor $\phi^{\mathbb{I}}$ geldt. Stel dat de $\in$-formule Φ k parameters in $\mathcal{F}$ bevat, zodat $\phi = \phi(x, p^0_1, \ldots, p^0_k)$ met $p^0_1, \ldots, p^0_k \in \mathcal{F}$ vast. Voor de eenvoud mogen we stellen dat $k = 1$ en dat $\phi = \phi(x, p^0)$. Omdat $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, is $p^0 \in \mathbb{I}$. Er bestaat dus een zekere $P \in \mathbb{WF}$, zodat $p^0 \in {}^*P$. Uit het Collectie-axioma in $\mathbb{WF}$ volgt nu dat voor de verzameling P een verzameling $X \in \mathbb{WF}$ bestaat zodat

$$\forall^{\mathrm{wf}} p (p \in P \wedge \exists^{\mathrm{wf}} x \phi^{\mathrm{wf}}(x, p) \rightarrow \exists^{\mathrm{wf}} x (x \in X \wedge \phi^{\mathrm{wf}}(x, p)))$$

geldt. Definieer nu de volgende meerwaardige functie in $\mathbb{WF}$ door middel van het Separatie-axioma:

$$F := \{(p, x) \in P \times X \mid \phi^{\mathrm{wf}}(x, p)\}.$$

Door middel van het Keuze-axioma in $\mathbb{WF}$ kan men uit F een éénwaardige functie $G \in \mathbb{WF}$ verkrijgen zodat voor alle $p \in P$, waarvoor er een $x \in X$ bestaat zodat $(p, x) \in F$, een $y \in X$ bestaat zodat $(p, y) \in G$ en $(p, y) \in F$ en voor alle andere $z \neq y$ geldt dat $(p, z) \notin G$.[10] We besluiten dat

$$\forall^{\mathrm{wf}} p (p \in P \wedge \exists^{\mathrm{wf}} x \phi^{\mathrm{wf}}(x, p) \rightarrow \phi^{\mathrm{wf}}(G(p), p))$$

[10] Dit wordt als volgt gedaan: definieer in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$, $F_p := \{(p, x) \in F \mid x \in X\}$ en $F' := \{F_p \in \mathcal{P}(F) \mid p \in P\}$. Door toepassing van het Keuze-axioma in $\mathbb{WF}$ krijgen we een functie G die aan de gestelde eisen voldoet.

een geldige formule is. Uit $*$-Overdracht volgt dat

$$\forall^{\text{int}} p(p \in {}^*P \wedge \exists^{\text{int}} x \phi^{\text{int}}(x,p) \rightarrow \phi^{\text{int}}(({}^*G)(p),p))$$

waar is. Nu is $p^0 \in {}^*P$ en $\Phi^{\text{int}}(p^0) = \exists^{\text{int}} x \phi^{\text{int}}(x,p^0)$ waar, zodat ook $\phi^{\text{int}}({}^*G(p^0),p^0)$ waar is. Omdat $G \in \mathbb{WF}$ en $p^0 \in \mathcal{F}$, is ${}^*G(p^0) \in \mathcal{F}$. We besluiten dat er een element $x \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $\phi^{\text{int}}(x,p^0)$ waar is. Uit de inductiehypothese volgt dat ook $\phi^{\mathcal{F}}(x,p^0)$ waar is. $\Phi^{\mathcal{F}}(p^0)$ is dus een geldige formule.

(3.) Zij x en y twee verschillende verzamelingen uit $\mathcal{F}$. Omdat $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, zijn x en y twee interne verzamelingen. Uit de transitiviteit van $\mathbb{I}$ volgt dat $x, y \subseteq \mathbb{I}$. De volgende formule is dus geldig

$$\psi^{\text{int}}(x,y) \quad \equiv \quad \neg\forall^{\text{int}} z(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Uit (2.) halen we dat

$$\psi^{\mathcal{F}}(x,y) \quad \equiv \quad \neg\forall^{\mathcal{F}} z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$$

waar is, zodat $x \cap \mathcal{F} \neq y \cap \mathcal{F}$.

(4.) We bewijzen dit door middel van inductie op n, het aantal elementen van x. Voor $n = 0$ is dit triviaal, aangezien $\emptyset \in \mathcal{F}$.
Zij nu $n > 0$. Stel dat $x \subseteq \mathcal{F}$. Voor een willekeurig element $a \in x$ geldt dat $x = y \cup \{a\}$ met $y = x \backslash \{a\}$. Uit de inductiehypothese volgt dat $y \in \mathcal{F}$. x is dan een element van $\mathcal{F}$, aangezien x het beeld is van $(y,a) \in \mathcal{F}^{<\omega}$ onder de standaard functie $f(y,a) = y \cup \{a\}$.
Stel nu dat $x \in \mathcal{F}$. De enige ledige verzameling in $\mathcal{F}$ is $\emptyset$, aangezien $\mathcal{F}$ voldoet aan het axioma Extensionaliteit. Hieruit volgt dat er een element $a \in x \cap \mathcal{F}$ bestaat. Definieer $y = x \backslash \{a\}$. y is een element van $\mathcal{F}$, aangezien y het beeld is van $(x,a) \in \mathcal{F}^{<\omega}$ onder de standaard functie $g(x,a) = x \backslash \{a\}$. Uit de inductiehypothese volgt dat $y \subseteq \mathcal{F}$, zodat ook $x \subseteq \mathcal{F}$.

(5.) en (6.): dit zijn technische bewijzen en zou ons geen extra inzichten opleveren. We verwijzen naar stelling 6.1.3 in [9].

□

Er bestaan als dunne klassen. Deze spelen een belangrijke rol in de opbouw van externe deeluniversa.

4.2.7 Definitie. Een klasse $\mathcal{K}$ wordt **dun** genoemd als elke verzameling $X \subseteq \mathcal{K}$ een verzameling van standaard grootte is.

4.2.8 Stelling. *Indien $K \subseteq \mathbb{I}$ een verzameling is van standaard grootte, dan is $\mathbb{S}(K)$ een dun intern deeluniversum.*

Bewijs. Dat $\mathbb{S}(K)$ een intern deeluniversum is, hebben we reeds aangetoond. Zij X een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{S}(K)$. We wensen aan te tonen dat X een verzameling van standaard grootte is. Uit de definitie van $\mathbb{S}(K)$ volgt dat voor $Z = K^{<\omega}$ geldt dat

$$\mathbb{S}(K) = \bigcup_{z \in Z} \mathbb{S}[z],$$

met $\mathbb{S}[z] = \mathbb{S}(\{z\}) = \{{}^*f(z) \mid f \in \mathbb{WF}\}$. Dus $X \subseteq \bigcup_{z \in Z} \mathbb{S}[z]$. Nu zijn zowel X als Z deelverzamelingen van $\mathbb{I}$[11], zodat uit Gevolg 1.2.21 volgt dat er goed-gefundeerde verzamelingen U en V bestaan zodat $X \subseteq {}^*U$ en $Z \subseteq {}^*V$. Stel $F = \mathcal{F}(V, U)$, zodat F de goed-gefundeerde verzameling is van alle functies van V naar U.
Kies een willekeurig $x \in X$. Dan bestaat er een $f \in \mathbb{WF}$ zodat $x = {}^*f(z)$ voor een $z \in Z$. Omdat $Z \subseteq {}^*V$ en $X \subseteq {}^*U$ is het voldoende ${}^*f$ te beschouwen als een functie van ${}^*V$ naar ${}^*U$. We mogen dus $f \in F$ nemen. We besluiten dat $X \subseteq \{{}^*f(w) \mid f \in F \wedge w \in Z\} \subseteq \bigcup\{range({}^*f/Z) \mid f \in F\}$. Deze laatste verzameling is een verzameling van standaard grootte omdat F een verzameling is van standaard grootte en $range({}^*f/Z)$ is het beeld van Z onder ${}^*f$ en dus ook een verzameling van standaard grootte (Z is een verzameling van standaard grootte omdat K dat is). Omdat X een deelverzameling is van deze verzameling, is X ook een verzameling van standaard grootte (we hebben meermaals Gevolg 1.3.42 toegepast). $\square$

4.2.9 Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een dun intern deeluniversum. Dan behoort elke interne verzameling $A \subseteq \mathcal{F}$ zelf tot $\mathcal{F}$.*

Bewijs. Zij $A \subseteq \mathcal{F}$ intern. Dan is A een interne verzameling van standaard grootte. Uit Hulpsteling 1.4.1 volgt dat A eindig is. A is een eindige deelverzameling van $\mathcal{F}$, zodat uit Stelling 4.2.6 volgt dat $A \in \mathcal{F}$. $\square$

4.2.10 Definitie. $\mathbb{I}_\kappa \stackrel{not}{=} \mathbb{I}_{{}^*\kappa} = \mathbb{S}({}^*\kappa)$ met κ een oneindig goed-gefundeerd kardinaalgetal.

Merk op dat we mogen aannemen dat κ een kardinaalgetal is en niet noodzakelijk een willekeurig ordinaalgetal, omdat uit Stelling 4.2.4 volgt dat ordinalen met hetzelfde kardinaalgetal dezelfde klasse $\mathbb{I}_\kappa$ genereren. Omdat $\mathbb{I}_\kappa$ een intern deeluniversum is (wegens Stelling 4.2.4) volgt uit Stelling 4.2.6 dat $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{I}_\kappa$, $\mathbb{I}_\kappa$ een $\in$-elementaire deelstructuur is van $\mathbb{I}$ en $\mathbb{I}_\kappa$ voldoet aan het axioma Extensionaliteit. We hebben dat

$$\mathbb{I}_\kappa = \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \text{ een functie en } x \in ({}^*\kappa)^{<\omega} \cap \operatorname{dom}{}^*f\}.$$

$\mathbb{I}_\kappa$ kan op meerdere manieren gekarakteriseerd worden, wat wordt aangetoond in de volgende stelling.

[11] X is een deelverzameling van $\mathbb{I}$, aangezien $X \subseteq \mathbb{S}(K) \subseteq \mathbb{I}$. Z is een deelverzameling van $\mathbb{I}$, aangezien elk element van Z een eindige deelverzameling is van $\mathbb{I}$ en dus ook intern.

4.2.11 Stelling.

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_\kappa &= \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \textit{ een functie en } x \in ({}^*\kappa)^{<\omega} \cap dom^* f\} && (4.1)\\
&= \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \textit{ een functie en } x \in \mathbb{I}_\kappa^{<\omega} \cap dom^* f\} && (4.2)\\
&= \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \textit{ een functie en } x \in {}^*\kappa \cap dom^* f\} && (4.3)\\
&= \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \textit{ een functie en } x \in {}^*\kappa \textit{ en } \kappa = dom f\} && (4.4)\\
&= \{f(x) \mid f \in \mathbb{S} \textit{ een functie en } x \in {}^*\kappa \textit{ en } {}^*\kappa = dom f\} && (4.5)\\
&= \left\{x \mid \exists^{wf} X(x \in {}^*X \wedge Kard(X) \leq \kappa)\right\} && (4.6)\\
&= \left\{x \mid \exists^{st} X(x \in X \wedge *\text{-}Kard(X) \leq {}^*\kappa)\right\}. && (4.7)
\end{aligned}$$

Bewijs. Vergelijking (4.1) is de definitie van $\mathbb{I}_\kappa$.
Vergelijking (4.2) volgt uit Stelling 4.2.4(1.).
Vergelijking (4.3) volgt uit Stelling 4.2.4(2.), aangezien er een bijectie $h \in \mathbb{WF}$ bestaat tussen κ en κ^n. (Zie [10] voor een bewijs dat elke oneindige verzameling A bijectief is met $A \times A$ in de theorie ZFC. Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-interpretatie is, bestaat er zo'n bijectie $h \in \mathbb{WF}$.)
Vergelijking (4.4) volgt uit vergelijking (4.3) door f uit te breiden en/of de restrictie van f tot κ te nemen in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$.
Vergelijking (4.5) volgt uit vergelijking (4.4) door middel van het isomorfisme *. Merk op dat ${}^*(dom f) = dom({}^*f)$: zij $f \in \mathbb{WF}$ een functie. Definieer

$$\Phi(dom(f), f) \equiv \forall x(x \in dom(f) \leftrightarrow \exists y((x, y) \in f)).$$

Dan is $\Phi^{\mathrm{wf}}(dom(f), f)$ waar, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat ${}^*(dom(f)) = dom({}^*f)$.
Vergelijking (4.6): kies een willekeurige verzameling x zodat $x \in {}^*X$ voor een goedgefundeerde verzameling X met $\mathrm{Kard}(X) \leq \kappa$. Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is, bestaat er een bijectie $f \in \mathbb{WF}$ van een deelverzameling Y van κ naar X.[12] Door $*$-Overdracht vinden we dat ${}^*f$ een interne bijectieve afbeelding is van ${}^*Y$ naar ${}^*X$. Hierbij is ${}^*Y \subseteq {}^*\kappa$. We besluiten dat

$$\left\{x \mid \exists^{\mathrm{wf}} X(x \in {}^*X \wedge \mathrm{Kard}(X) \leq \kappa)\right\} \subseteq \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \text{ een functie en } x \in {}^*\kappa \cap dom^* f\}.$$

Omgekeerd, stel $x = {}^*f(y)$ voor een zekere functie $f \in \mathbb{WF}$ en $y \in {}^*\kappa \cap dom({}^*f)$. We weten dat $dom({}^*f) = {}^*(dom f)$. Men kan door middel van $*$-Overdracht aantonen dat ${}^*A \cap {}^*B = {}^*(A \cap B)$, waaruit volgt dat ${}^*\kappa \cap dom({}^*f) = {}^*(\kappa \cap dom(f))$. Stel $g \in \mathbb{WF}$ is de functie door f te beperken tot $\kappa \cap dom(f)$. Door gebruik te maken van het Vervangingsaxioma in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$ bekomen we dat $range(g)$ een verzameling is in $\mathbb{H}$ en ook een element is van $\mathbb{WF}$. ${}^*g$ is een interne functie die een beperking is van ${}^*f$ tot ${}^*(\kappa \cap dom(f))$ (dit kunnen we bekomen door toepassing van $*$-Overdracht). We besluiten dat $x = {}^*f(y) = {}^*g(y) \in range({}^*g)$. Nu is

$$\Psi(range(g), g) \equiv \forall y(y \in range(g) \leftrightarrow \exists x((x, y) \in g)),$$

[12] Zo'n bijectie f vinden we door de inverse te nemen van de bijectie h van X naar $\mathrm{Kard}(X) \leq \kappa$. Hierbij is $\mathrm{Kard}(X) \subseteq \kappa$.

waar, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat $^*(range(g)) = range(^*g)$. We besluiten dat $x \in {}^*(range(g))$. Omdat we werken in het ZFC-universum $\mathbb{WF}$ en $dom(g) \subseteq \kappa$, geldt trivialerwijs dat $\text{Kard}(range(g)) \leq \kappa$, zodat

$$\left\{x \mid \exists^{\text{wf}} X(x \in {}^*X \wedge \text{Kard}(X) \leq \kappa)\right\} \supseteq \{{}^*f(x) \mid f \in \mathbb{WF} \text{ een functie en } x \in {}^*\kappa \cap dom^* f\}\,.$$

Vergelijking (4.7) volgt uit vergelijking (4.6) door middel van het isomorfisme *. Merk op dat het begrip Kardinaliteit in $\mathbb{WF}$ door * wordt vervangen door het begrip $*$-Kardinaliteit in $\mathbb{S}$ of $\mathbb{I}$. $\square$

$\mathbb{I}_\kappa$ en $\mathbb{S}(X)$ zijn de belangrijkste interne deeluniversa. We gaan nu specifieke interne deeluniversa van de vorm $\mathbb{S}[\zeta] = \mathbb{S}(\{\zeta\})$ construeren. Zij κ een vast oneindig goed-gefundeerd kardinaalgetal. Elk $*$-ordinaalgetal $\zeta < {}^*\kappa$ definieert een specifiek ultrafilter U_ζ. Indien U_ζ speciale eigenschappen heeft, dan voldoet onze $\mathbb{S}[\zeta]$ aan de eigenschappen die we wensen te hebben. Eerst volgt een algemene inleiding op filters en ultrafilters.

4.2.12 Definitie. Zij I een oneindige verzameling of klasse. Een **filter** in I is een niet-ledige verzameling of klasse U die aan de volgende vereisten voldoet:

1. elke $u \in U$ is niet-ledige deelklasse van I,
2. als $u \in U$ en $v \in U$, dan ook $u \cap v \in U$,
3. als $u \in U$ en $u \subseteq v \subseteq I$, dan ook $v \in U$.

Een filter is een **ultrafilter** als voor elke $X \subseteq I$, $X \notin U$ geldt dat $I \backslash X \in U$. Indien I een klasse is, dan is niet noodzakelijk elk element van U een verzameling. Om alles geldig te laten doorgaan hebben we dan een parametrisatie van verzamelingen nodig om U te beschrijven, maar we gaan er hier niet verder op in. Indien $I \in \mathbb{WF}$, dan is U altijd een verzameling.

4.2.13 Definitie. Zij κ een oneindig kardinaalgetal en zij f, g afbeeldingen gedefinieerd op $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa)$. We zeggen dat

1. f **monotoon** is, indien $u \subseteq v$ impliceert dat $f(u) \supseteq f(v)$, voor elke $u, v \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa)$.
2. g **additief** is, indien $g(u \cup v) = g(u) \cap g(v)$, voor alle $u, v \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa)$.
3. $g \leq f$, indien $g(u) \subseteq f(u)$, voor alle $u \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa)$.

4.2.14 Definitie. Een ultrafilter over κ (merk op dat dit zeker een verzameling is in $\mathbb{H}$, omdat $\kappa \in \mathbb{WF}$) is κ^+**-goed**[13] als voor elke monotone afbeelding $f : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa) \to U$ er een additieve afbeelding $g : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa) \to U$ bestaat zodat $g \leq f$. Een ultrafilter is **aftelbaar incompleet** als er een familie $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U$ bestaat met $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \emptyset$

[13] κ^+ is het kardinaalgetal volgend op κ.

4.2.15 Definitie. Een $*$-ordinaalgetal $\zeta < {}^*\kappa$ wordt **κ-goed** genoemd, als de ultrafilter $U_\zeta = \{X \subseteq \kappa \mid \zeta \in {}^*X\}$ over κ, κ^+-goed en aftelbaar incompleet is. Dat U_ζ een ultrafilter over κ is, is eenvoudig in te zien.

4.2.16 Stelling.

1. *Zij κ een oneindig goed-gefundeerd kardinaalgetal. Dan bestaat er zeker een $*$-ordinaalgetal $\zeta < {}^*\kappa$ dat κ-goed is.*

2. *Zij ζ zoals hierboven. Dan is $\mathbb{S}[\zeta] = \mathbb{S}(\{\zeta\})$ een dun intern deeluniversum dat voldoet aan het volgende:*

voor elke verzameling $X \subseteq \mathbb{S}[\zeta]$ van kardinaliteit $\leq \kappa$, waarvoor $\bigcap X \neq \emptyset$, geldt dat $\mathbb{S}[\zeta] \cap \bigcap X \neq \emptyset$.[14]

Bewijs. (1.) Hier gebruiken we een gekende stelling van ZFC: '*Voor elk oneindig kardinaalgetal κ bestaat er een κ^+-goede aftelbaar incomplete ultrafilter U op κ.*' Voor een bewijs van deze stelling verwijzen we naar de literatuur (bijvoorbeeld in [1]). Omdat $\mathbb{WF}$ een ZFC-universum is, kunnen we deze stelling gebruiken. We verkrijgen een κ^+-goede aftelbaar incomplete ultrafilter U op κ. We wensen aan te tonen dat $U = U_\zeta$ voor een zekere $\zeta < {}^*\kappa$.
Bekijk de verzameling

$$V := \{{}^*u \mid u \in U\}.$$

Door het Collectie- en Separatie-axioma toe te passen is V een verzameling . U is een deelverzameling van $\mathcal{P}(\kappa)$, zodat U een verzameling is van standaard grootte. Hieruit volgt dat V ook een verzameling van standaard grootte is (we passen tweemaal Gevolg 1.3.42 toe). Uit de definitie van een filter volgt dat U $\cap$-gesloten is en dat U bestaat uit niet-ledige verzamelingen, zodat ook V $\cap$-gesloten is en bestaat uit niet-ledige verzamelingen. Bovendien is $V \subseteq \mathbb{I}$. Door toepassing van het axioma Saturatie verkrijgen we een element $\zeta < {}^*\kappa$, zodat $\zeta \in v$ voor alle $v \in V$. We besluiten dat

$$U \subseteq U_\zeta.$$

Zij nu $x \in U_\zeta$ en $x \notin U$. Omdat U een ultrafilter is over κ, is $\kappa \backslash x \in U$. Hieruit volgt dat $\zeta \in {}^*(\kappa \backslash x)$, zodat $\zeta \notin {}^*x$, een tegenstrijdigheid. Dus $U = U_\zeta$.

(2.) Dat $\mathbb{S}(\{\zeta\})$ een dun intern deeluniversum is, volgt uit Stelling 4.2.8. Zij $X \subseteq \mathbb{S}[\zeta]$ een verzameling van kardinaliteit $\leq \kappa$, waarvoor $\bigcap X \neq \emptyset$. We wensen aan te tonen dat $\mathbb{S}[\zeta] \cap \bigcap X \neq \emptyset$.
We kunnen schrijven dat $X = \{X_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Desnoods kunnen we verscheidene X_α's aan elkaar gelijk stellen. Elke X_α is een element van $\mathbb{S}[\zeta] = \mathbb{S}(\{\zeta\})$, zodat voor alle α

[14] Het bewijs van deze stelling is gebaseerd op stelling 6.2.6 en 4.2.17 uit [9].

er een functie $H_\alpha \in \mathbb{WF}$ bestaat zodat $X_\alpha = {}^*H_\alpha(\zeta)$ (hier gebruiken we het Standaard grootte Keuze-axioma). Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat ${}^*H_\alpha$ gedefinieerd is op heel ${}^*\kappa$, zodat H_α gedefinieerd is op heel κ. Desnoods moeten we ${}^*H_\alpha$ uitbreiden en/of beperken. Definieer $H(x,y) = H_x(y)$ in $\mathbb{WF}$, zodat $X_\alpha = {}^*H_\alpha(\zeta) = {}^*H({}^*\alpha, \zeta)$. De laatste gelijkheid volgt uit $*$-Overdracht toe te passen op de volgende formule

$$\Phi^{\mathrm{wf}}(\alpha, H, H_\alpha) \equiv \forall^{\mathrm{wf}} x \forall^{\mathrm{wf}} y(((\alpha, x), y) \in H \leftrightarrow (x,y) \in H_\alpha).$$

Omdat $U = U_\zeta$, met U_ζ zoals in (1.), aftelbaar incompleet is, bestaat er een rij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zodat $I_n \in U_\zeta$ en $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$. Door J_n gelijk te nemen aan de doorsnede van de eerste n elementen van die rij en dit nieuw element ook te noteren als I_n, kunnen we extra aannemen dat $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ (Bovendien kunnen we $I_0 = \kappa$ nemen.)
Kies een willekeurige $s \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\kappa)$ en $\xi < \kappa$ en definieer

$$\begin{aligned} H_s(\xi) &:= \bigcap_{\alpha\in s} H(\alpha,\xi) = \bigcap_{\alpha\in s} H_\alpha(\xi) \\ f(s) &:= I_n \cap \{\xi < \kappa \mid H_s(\xi) \neq \emptyset\}, \text{ indien } s \text{ een verzameling is met } n \text{ elementen.} \end{aligned}$$

We tonen nu aan dat $f(s) \in U = U_\zeta$. Trivialerwijs is $f(s) \subseteq \kappa$, zodat we enkel nog moeten aantonen dat $\zeta \in {}^*(f(s))$. Nu is

$${}^*(f(s)) = {}^*I_n \cap {}^*\{\xi < \kappa \mid H_s(\xi) \neq \emptyset\}.$$

Omdat $I_n \in U = U_\zeta$, is zeker $\zeta \in {}^*I_n$. Stel nu $A := \{\xi < \kappa \mid H_s(\xi) \neq \emptyset\}$. Dan is, voor een vaste $s \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\kappa)$,

$$\Psi^{\mathrm{wf}}(A, \kappa, H_s) \equiv \forall^{\mathrm{wf}} x(x \in A \leftrightarrow (x < \kappa \wedge \exists^{\mathrm{wf}} y(y \in H_s(x))))$$

waar, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat $\zeta \in {}^*(f(s))$ als en slechts als ${}^*(H_s)(\zeta) \neq \emptyset$. Nu is

$$\Upsilon^{\mathrm{wf}}(\kappa, s, H_s, H) \equiv \forall^{\mathrm{wf}} y < \kappa(\forall^{\mathrm{wf}} x(x \in H_s(y) \leftrightarrow \forall \alpha \in s(x \in H(\alpha, y))))$$

waar, zodat uit $*$-Overdracht volgt dat ${}^*(H_s)(\zeta) = \bigcap_{\alpha\in{}^*s} {}^*H(\alpha,\zeta) =$[15] $\bigcap_{\alpha\in s} {}^*H({}^*\alpha, \zeta) = \bigcap_{\alpha\in s} X_\alpha \neq \emptyset$. We kunnen besluiten dat $\zeta \in {}^*(f(s))$, zodat $f(s) \in U$. f is dus een afbeelding van $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\kappa)$ naar U die bovendien monotoon is.

Omdat U κ^+-goed is, bestaat er een additieve afbeelding g van $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\kappa)$ naar $U = U_\zeta$ zodat $g \leq f$. Definieer nu voor elke $\xi < \kappa$

$$s_\xi = \{\alpha < \kappa : \xi \in g(\{\alpha\})\}.$$

s_ξ is een eindige verzameling. Stel namelijk dat s_ξ minstens n elementen $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ bevat. Dan geldt

$$\xi \in g(\{\alpha_1\}) \cap \cdots \cap g(\{\alpha_n\}) \overset{g \text{ additief}}{=} g(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \subseteq f(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \subseteq I_n.$$

[15]Deze gelijkheid geldt omdat s eindig is, zodat ${}^*s = \{{}^*x \mid x \in s\}$.

Indien s_ξ niet eindig is, dan is $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$, een tegenstrijdigheid. Hieruit volgt dat $s_\xi \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(\kappa)$, zodat we dus $H_{s_\xi}(\xi)$ kunnen beschouwen. Bovendien is

$$\xi \in \bigcap_{\alpha\in s_\xi} g(\{\alpha\}) \overset{g \text{ additief}}{=} g(s_\xi) \subseteq f(s_\xi),$$

zodat uit de definitie van f volgt dat $H_{s_\xi}(\xi) \neq \emptyset$. Door middel van het Standaard grootte Keuze-axioma kan men een functie $x \in \mathbb{WF}$ met domein κ vinden zodat $x(\xi) \in H_{s_\xi}(\xi)$ voor elke $\xi < \kappa$. Om dit formeel uit te schrijven hebben we het Separatie-axioma nodig. Voor een $\xi < \kappa$ en $y \in H_{s_\xi}(\xi)$ is (ξ, y) een element van $\{\xi\} \times H_{s_\xi}(\xi)$ en $\{(\xi, y) \mid y \in H_{s_\xi}(\xi)\}$ een element van $\mathcal{P}\left(\kappa \times \left(\bigcup_{\xi<\kappa} H_{s_\xi}(\xi)\right)\right)$ (dit laatste is een verzameling wegens Gevolg 1.3.42)[16]. Door tweemaal het Separatie-axioma toe te passen vinden we dat $\{\{(\xi, y) \mid y \in H_{s_\xi}(\xi)\} \mid \xi < \kappa\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. Deze laatste verzameling is een verzameling van standaard grootte, zodat uit men uit het Standaard grootte Keuze-axioma een functie x krijgt die aan onze eisen voldoet.
Voor elke $\xi, \alpha < \kappa$ met $\xi \in g(\{\alpha\})$ geldt dat $x(\xi) \in H_\alpha(\xi) = H(\alpha, \xi)$ (denk aan de definitie van s_ξ). Uit $*$-Overdracht volgt dat voor alle $\xi, \alpha < {}^*\kappa$ met $\xi \in {}^*g(\{\alpha\})$ geldt dat ${}^*x(\xi) \in {}^*H(\alpha, \xi)$

Kies nu een willekeurige $\alpha < \kappa$. We wensen aan te tonen dat ${}^*x(\zeta) \in X_\alpha$. Nu is $g(\{\alpha\}) \in U = U_\zeta$, door de keuze van g, zodat $\zeta \in {}^*\left(g(\{\alpha\})\right) \overset{*\text{-Overdracht}}{=} {}^*g(\{{}^*\alpha\})$. Hieruit volgt dat ${}^*x(\zeta) \in {}^*H({}^*\alpha, \zeta) = {}^*H_\alpha(\zeta) = X_\alpha$. We besluiten dat

$${}^*x(\zeta) \in \bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \cap \mathbb{S}(\{\zeta\}),$$

zodat $\bigcap_{\alpha<\kappa} X_\alpha \cap \mathbb{S}(\{\zeta\}) \neq \emptyset$. □

4.3 Externe deeluniversa

We werken ook hier in $\mathbb{H}$ *en* HST.

4.3.1 Definitie. Zij $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$ een intern deeluniversum. Een verzameling Y is **$\mathcal{F}$-verkeerd** als er een $Z \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $Y = Z \cap \mathcal{F} \subsetneq Z$. (Als zo'n Z bestaat, dan is ze uniek, omdat een intern deeluniversum voldoet aan het axioma Extensionaliteit.)

Indien Y een $\mathcal{F}$-verkeerde verzameling is, dan is Y een deelverzameling van $\mathcal{F}$, maar behoort Y niet tot $\mathcal{F}$. Later zullen we zien dat elke interne verzameling $X \subseteq \mathcal{F}$ niet $\mathcal{F}$-verkeerd kan zijn. Indien $\mathcal{F} = \mathbb{I}$, dan is geen enkele verzameling $\mathcal{F}$-verkeerd, aangezien voor geen enkele interne verzameling Z geldt dat $Z \cap \mathbb{I} \subsetneq Z$. Het begrip $\mathcal{F}$-verkeerd wordt duidelijker in Stelling 4.3.4.

[16]Merk op dat $H_{s_\xi}(\xi) \in \mathbb{WF}$.

4.3.2 Definitie. Stel $\mathcal{K}$ is een klasse die het intern deeluniversum $\mathcal{F}$ bevat.

1. We zeggen dat $\mathcal{K}$ **extensionaal** is, indien $\mathcal{K}$ voldoet aan het axioma Extensionaliteit. Dit betekent dat $X \cap \mathcal{K} \neq Y \cap \mathcal{K}$ voor elke twee verzamelingen $X \neq Y$ in $\mathcal{K}$.
2. We zeggen dat $\mathcal{K}$ een **interne kernuitbreiding van** $\mathcal{F}$ is, indien $\mathcal{K} \cap \mathbb{I} = \mathcal{F}$.
3. We zeggen dat $\mathcal{K}$ **transitief is over** $\mathcal{F}$, indien voor elke verzameling $X \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$ geldt dat $X \subseteq \mathcal{K}$.
4. We zeggen dat $\mathcal{K}$ **compleet is over** $\mathcal{F}$, indien voor elke verzameling $X \subseteq \mathcal{K}$, $X \notin \mathcal{K}$ geldt dat X $\mathcal{F}$-verkeerd is.

4.3.3 Definitie. Een **extern deeluniversum** is een klasse $\mathcal{K}$ die voldoet aan ^{0}HST en die $\mathbb{S}$ bevat.

Zoals eerder gezegd[17]: de klassen $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ zijn gedefinieerd in de theorie ^{0}HST. Dit komt omdat we nergens de axioma's Saturatie, Standaard grootte Keuze en Afhankelijke Keuze nodig hebben. Bovendien hebben we bij het bewijs van het bestaan van de bijectie * tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{S}$ enkel gebruik gemaakt van ^{0}HST en zelfs het ZFC-karakter van $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$ blijft ook gelden in ^{0}HST. ^{0}HST is dus sterk genoeg om de meeste eigenschappen van HST nog te laten doorgaan.
Omdat ^{0}HST het axioma Extensionaliteit bevat, is elk extern deeluniversum extensionaal. Dit is een heel belangrijke eigenschap, aangezien elk niet-extensionaal universum niet zinvol is.
Ons doel is om een intern deeluniversum $\mathcal{F}$ uit te breiden naar een extern deeluniversum $\mathcal{K}$ dat een transitieve, interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$. Daarbij denken we natuurlijk aan de Von Neumann constructie. Om een beter inzicht te krijgen in de definities, geven we eerst een stelling. Eigenschap (2.) is gelijkaardig aan Stelling 4.2.9.

4.3.4 Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een intern deeluniversum en $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$.*

1. *Een interne verzameling $X \subseteq \mathcal{F}$ kan niet $\mathcal{F}$-verkeerd zijn.*
2. *Zij $\mathcal{K}$ compleet over $\mathcal{F}$. Dan behoort elke interne $X \subseteq \mathcal{F}$ tot $\mathcal{K}$.*
3. *Indien $\mathcal{K}$ een transitieve interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$, dan is $\mathcal{K}$ extensionaal als en slechts als $\mathcal{K}$ geen $\mathcal{F}$-verkeerde verzamelingen bevat als element.*
4. *Zij $\mathcal{K}$ een extern deeluniversum, dat een transitieve interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$. Dan behoort elke eindige verzameling $X \subseteq \mathcal{K}$ tot $\mathcal{K}$.*
5. *Zij $\mathcal{K}$ een extern deeluniversum, dat een transitieve, complete interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$. Indien $\mathcal{F} \cap ({}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}) \neq \emptyset$, dan is $\mathbb{WF} \subseteq \mathcal{K}$.*

[17] Zelfde opmerking Voetnoot 1 van Hoofdstuk 4.

Bewijs. (1.) Zij $X \subseteq \mathcal{F}$ een interne vezameling zodat $X = Y \cap \mathcal{F} \subsetneq Y$ met $Y \in \mathcal{F}$. We zoeken een tegenstrijdigheid. Er geldt zeker dat X niet-ledig is, anders zou uit $Y \cap \mathcal{F} = \emptyset$ en uit de extensionaliteit van $\mathcal{F}$ volgt dat $Y = \emptyset = X$, een tegenstrijdigheid. Uit Stelling 4.2.6(2.) volgt dat $\mathcal{F}$ een ZFC-universum is, zodat het Keuze-axioma geldig is met betrekking tot $\mathcal{F}$. Hieruit volgt dat er een goede ordening $\prec$ op Y bestaat met betrekking tot $\mathcal{F}$. $\prec$ is dus een verzameling in $\mathcal{F}$. Opnieuw wegens Stelling 4.2.6(2.) is $\prec$ een goede ordening op Y met betrekking tot $\mathbb{I}$. Bekijk nu de interne verzameling $Y \backslash X \neq \emptyset$. Dan bestaat er een $\prec$-minimaal element $x \in Y \backslash X$, met betrekking tot de klasse $\mathbb{I}$. Uit de relatie tussen X en Y volgt dat $x \notin \mathcal{F}$.
Het $\prec$-minimaal element $a \in \mathcal{F}$ van Y ten opzichte van $\mathcal{F}$ is ook het $\prec$-minimaal element van Y ten opzichte van $\mathbb{I}$ (wegens Stelling 4.2.6(2.)). Hieruit volgt dat x zeker niet het $\prec$-minimaal element is van Y ten opzichte van $\mathbb{I}$, aangezien $x \notin \mathcal{F}$.
Er bestaat dus zeker een $y \prec x$ met $y \in Y$. Uit de constructie van x halen we dat $y \in X$, zodat $y \in \mathcal{F}$. Omdat we weten dat in een goede ordening $\prec$ (over $\mathbb{I}$) x uniek kan bepaald worden door al zijn voorgangers, is $x \in Def^{\mathbb{I}}_{\in,\mathrm{st}}(\mathcal{F})$. Uit Stelling 4.2.6(5.) halen we dat $x \in \mathcal{F}$, een tegenstrijdheid.

(2.) Dit volgt meteen uit de definitie van het compleet zijn van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ en (1.).

(3.) Zij X een $\mathcal{F}$-verkeerde verzameling in $\mathcal{K}$. Dan is $(X \cap \mathcal{F} =)X = Y \cap \mathcal{F}$ voor een zekere $Y \in \mathcal{F}$ en $X \subsetneq Y$. Dan is $Y \cap \mathcal{F} = Y \cap \mathcal{K}$, omdat $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \mathbb{I}$ en $Y \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$ zodat $Y \subseteq \mathbb{I}$. Ook is $X = X \cap \mathcal{F} = X \cap \mathcal{K}$, om dezelfde redenen ($X \subseteq Y \subseteq \mathbb{I}$). We kunnen besluiten dat $X \neq Y$ en $X \cap \mathcal{K} = Y \cap \mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ is dus niet extensionaal.
Omgekeerd zij $X \neq Y$ twee verzamelingen in $\mathcal{K}$ zodat $X \cap \mathcal{K} = Y \cap \mathcal{K}$. We wensen aan te tonen dat er $\mathcal{F}$-verkeerde verzamelingen bestaan in $\mathcal{K}$. Indien X en Y twee verzamelingen zijn in $\mathcal{F}$, dan levert dit een tegenstrijdigheid op, aangezien elk intern deeluniversum voldoet aan het axioma Extensionaliteit en $X \cap \mathcal{F} = X \cap \mathcal{K} = Y \cap \mathcal{K} = Y \cap \mathcal{F}$. Indien X en Y beiden niet tot $\mathcal{F}$ behoren, volgt uit de transitiviteit van $\mathcal{K}$ dat $X \cup Y \subseteq \mathcal{K}$. Dan is $X = X \cap \mathcal{K} = Y \cap \mathcal{K} = Y$, een tegenstrijdigheid. Het enige geval dat nog overblijft is dat één van de twee verzamelingen tot $\mathcal{F}$ behoort en de andere tot $\mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$. Stel dat $X \in \mathcal{F}$ en $Y \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$. Uit de transitiviteit van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ volgt dat $Y \subseteq \mathcal{K}$. Er geldt dus dat $X \cap \mathcal{K} = Y$. Omdat $X \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, is $X \subseteq \mathbb{I}$, zodat $X \cap \mathcal{F} = X \cap \mathcal{K} \cap \mathbb{I} = X \cap \mathcal{K} = Y \neq X$. Hieruit volgt dat Y een $\mathcal{F}$-verkeerde verzameling is in $\mathcal{K}$.

(4.) Zij $X \subseteq \mathcal{K}$ een eindige verzameling. Omdat $\mathcal{K}$ voldoet aan ^{0}HST, is $\mathcal{K}$ gesloten onder eindige verzamelingsvorming. Hieruit volgt dat er een verzameling $Y \in \mathcal{K}$ bestaat zodat $Y \cap \mathcal{K} = X$. Meer concreet: indien $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, is $X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$. x_i is een element van $\mathcal{K}$, zodat er een verzameling $Y_2 \in \mathcal{K}$ bestaat met $\{x_1, x_2\} = Y_2 \cap \mathcal{K}$ (axioma Paar in $\mathcal{K}$). Dan bestaat er ook een verzameling $Y_3 \in \mathcal{K}$, zodat $\{x_1, x_2\} \cup \{x_3\} = Y_3 \cap \mathcal{K}$ (axioma Paar en Unie in $\mathcal{K}$), enzovoort. Hieruit halen we dat er een verzameling $Y \in \mathcal{K}$ bestaat zodat $Y \cap \mathcal{K} = X$.
Indien $Y \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$, dan is $Y \subseteq \mathcal{K}$ omwille van de transitiviteit van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$. Hieruit volgt dat $X = Y \in \mathcal{K}$.

Indien $Y \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, dan is $Y \subseteq \mathbb{I}$, zodat $Y \cap \mathcal{F} = Y \cap \mathcal{K} \cap \mathbb{I} = Y \cap \mathcal{K} = X$. We besluiten dat X een eindige deelverzameling is van $\mathcal{F}$, zodat uit Stelling 4.2.6 volgt dat $X \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$.

(5.) Voor een bewijs, zie stelling 6.3.3(iv) in [9]. We geven een korte schets. Omdat $\in / \mathbb{WF}$ een goed-gefundeerde relatie is in HST, kunnen we een $\in$-minimaal element $X \in \mathbb{WF}$ beschouwen dat niet tot $\mathcal{K}$ behoort. Door de minimaliteit van X volgt dat $X \subseteq \mathcal{K}$. Indien $X \notin \mathcal{K}$, volgt uit de compleetheid van $\mathcal{K}$ dat er een verzameling $Y \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $X = Y \cap \mathcal{F} \subsetneq Y$. Hieruit volgt dat $X \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, zodat $X \subseteq \mathbb{WF} \cap \mathbb{I}$. Men kan aantonen dat hieruit volgt dat $X \subseteq \mathbb{S}$ en dat $X = Y \cap \mathcal{F}$ een aftelbare deelverzameling is van $\mathbb{S}$. Uit Stelling 4.2.6(6.) halen we dat $Y \subseteq \mathcal{F}$, zodat $X = Y \in \mathcal{F}$, een tegenstrijdigheid. $\square$

4.3.1 Von Neumann constructie over interne deeluniversa

We wensen interne deeluniversa uit te breiden naar externe deeluniversa. Het meest voor de hand liggende is om de Von Neumann constructie te gebruiken. We moeten deze constructie echter wat aanpassen, omdat we op het einde extensionale externe deeluniversa willen. Daarbij denken we aan Stelling 4.3.4(3.).

4.3.5 Definitie. Zij $\mathcal{F}$ een intern deeluniversum.[18]

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0^E[\mathcal{F}] &= \mathcal{F}, \\ \mathbb{V}_{\xi+1}^E[\mathcal{F}] &= \mathcal{F} \cup \left\{ Y \mid Y \subseteq \mathbb{V}_\xi^E[\mathcal{F}] \text{ en } Y \text{ is niet } \mathcal{F}\text{-verkeerd} \right\}, \\ \mathbb{V}_\lambda^E[\mathcal{F}] &= \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi^E[\mathcal{F}], \text{ indien } \lambda \text{ een limietordinaal is.} \end{aligned}$$

Definieer

$$\mathbb{WF}[\mathcal{F}] = \bigcup_{\xi \in Ord} \mathbb{V}_\xi^E[\mathcal{F}],$$

de klasse van alle verzamelingen goed-gefundeerd over $\mathcal{F}$. Net zoals bij de gewone Von Neumann hiërarchie kan men aantonen dat dit klassen zijn, maar dit laten we hier achterwege.

4.3.6 Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een intern deeluniversum. Dan is $\mathcal{K} = \mathbb{WF}[\mathcal{F}]$ transitief en compleet over $\mathcal{F}$. Als bovendien elke interne verzameling $X \subseteq \mathcal{F}$ behoort tot $\mathcal{F}$, dan is $\mathcal{K}$ een extern deeluniversum dat een interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$.*

Bewijs. $\mathcal{K}$ transitief over $\mathcal{F}$: dit volgt triviaal uit de constructie.

$\mathcal{K}$ compleet over $\mathcal{F}$: zij $X \subseteq \mathcal{K}$ en $X \notin \mathcal{K}$. Voor elke $x \in X$ bestaat er een $\xi \in \mathrm{Ord}$, zodat $x \in \mathbb{V}_\xi^E[\mathcal{F}]$. Door het Collectie-axioma toe te passen kunnen we een verzameling A vinden zodanig dat $A \subseteq \mathrm{Ord}$ en dat voor elke $x \in X$ een $\xi \in A$ bestaat zodat $x \in \mathbb{V}_\xi^E[\mathcal{F}]$.

[18] 'E' verwijst naar 'extensionaal'.

Voor elke deelverzameling A van Ord, bestaat er een ordinaal ζ zodanig dat $\xi < \zeta$, voor alle $\xi \in A$ (dit is een eigenschap van ordinalen over ZFC, zie Bijlage D). We besluiten dat $X \subseteq \mathbb{V}^E_\zeta[\mathcal{F}]$[19]. Omdat $X \notin \mathcal{K}$, moet X $\mathcal{F}$-verkeerd zijn.

Vanaf nu nemen we aan dat elke interne verzameling $X \subseteq \mathcal{F}$ tot $\mathcal{F}$ behoort. Eerst tonen we aan dat $\mathcal{K}$ een interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$. Trivialerwijs is $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K} \cap \mathbb{I}$. Kies nu een $X \in \mathcal{K} \cap \mathbb{I}$. Dan is $X \in \mathbb{V}^E_\xi[\mathcal{F}]$ voor een zekere ξ. We wensen aan te tonen dat $X \in \mathcal{F}$. Door middel van inductie op ξ, tonen we aan dat elk intern element van $\mathbb{V}^E_\xi[\mathcal{F}]$ tot $\mathcal{F}$ behoort. Indien $\xi = 0$, dan is dit triviaal. Zij nu $\xi > 0$. Door de constructie van $\mathcal{K}$, volgt dat $X \in \mathcal{F}$ of $X \subseteq \bigcup_{\eta<\xi} \mathbb{V}^E_\eta[\mathcal{F}]$. Voor dit laatste volgt uit de inductiehypothese dat $X \subseteq \mathcal{F}$. We besluiten dat $X \in \mathcal{F}$.
We moeten nog aantonen dat $\mathcal{K}$ een extern deeluniversum is. Trivialerwijs is $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{K}$, zodat we enkel de axioma's van ^{0}HST moeten controleren relatief ten opzichte van $\mathcal{K}$. We gaan niet alle axioma's controleren, aangezien het vaak hetzelfde stramien volgt. We merken eerst op dat de interne verzamelingen in het universum $\mathcal{K}$ samenvallen met $\mathcal{F}$.

Extensionaliteit: dit volgt triviaal uit Stelling 4.3.4(3.).

Transitiviteit van $\mathbb{I}$: kies een willekeurige $x \in \mathcal{F}$ en $y \in \mathcal{K}$ zodat $y \in x$. We wensen aan te tonen dat $y \in \mathcal{F}$. Omdat $x \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}$, kunnen we de transitiviteit van $\mathbb{I}$ in $\mathbb{H}$ gebruiken. Hieruit volgt dat $y \in \mathbb{I}$. We besluiten dat $y \in \mathbb{I} \cap \mathcal{K} = \mathcal{F}$.

Separatie: kies een willekeurige verzameling $X \in \mathcal{K}$ en een st-$\in$-formule ϕ. We wensen aan te tonen dat er een verzameling $Y \in \mathcal{K}$ bestaat zodat $\forall^{\mathcal{K}} y(y \in Y \leftrightarrow (y \in X \wedge \phi^{\mathcal{K}}(y)))$. Beschouw de formule $\psi(y) = \phi^{\mathcal{K}}(y) \wedge y \in \mathcal{K}$. Uit het Separatie-axioma in $\mathbb{H}$ volgt dat er een verzameling Y' bestaat zodat $\forall y(y \in Y' \leftrightarrow (y \in X \wedge \phi^{\mathcal{K}}(y) \wedge y \in \mathcal{K}))$ geldt. Y' is dus ook een verzameling dat voldoet aan $\forall^{\mathcal{K}} y(y \in Y' \leftrightarrow (y \in X \wedge \phi^{\mathcal{K}}(y)))$. Indien $Y' \in \mathcal{K}$, dan kunnen we $Y = Y'$ nemen. Indien $Y' \notin \mathcal{K}$, dan volgt uit de compleetheid van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ dat er een verzameling $Z \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $Y' = Z \cap \mathcal{F} = Z \cap \mathcal{K}$. Dan kunnen we $Y = Z$ nemen.

Unie: kies een willekeurige verzameling $X \in \mathcal{K}$. We wensen aan te tonen dat er een verzameling $Y \in \mathcal{K}$ bestaat zodat $\forall^{\mathcal{K}} y(y \in Y \leftrightarrow \exists^{\mathcal{K}} x(x \in X \wedge y \in x))$. Door het Unie-axioma van HST toe te passen op de verzameling $X \cap \mathcal{K}$, volgt dat er een verzameling Y' bestaat zodat $\forall y(y \in Y' \leftrightarrow \exists x(x \in (X \cap \mathcal{K}) \wedge y \in x))$. Er geldt dus dat $\forall y(y \in Y' \leftrightarrow \exists^{\mathcal{K}} x(x \in X \wedge y \in x))$ waar is, zodat ook $\forall^{\mathcal{K}} y(y \in Y' \leftrightarrow \exists^{\mathcal{K}} x(x \in X \wedge y \in x))$ geldt. Definieer nu $Y'' = Y' \cap \mathcal{K}$. Dan geldt ook $\forall^{\mathcal{K}} y(y \in Y'' \leftrightarrow \exists^{\mathcal{K}} x(x \in X \wedge y \in x))$. Indien $Y'' \in \mathcal{K}$, dan kunnen we $Y = Y''$ nemen. Indien $Y'' \notin \mathcal{K}$, dan volgt uit de compleetheid van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ dat er een verzameling $Z \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $Y'' = Z \cap \mathcal{F} = Z \cap \mathcal{K}$. Dan kunnen we $Y = Z$ nemen. (Men kan het axioma 'Paar' ten opzichte van $\mathcal{K}$ op dezelfde wijze bewijzen.)

[19]Door middel van inductie kan men aantonen dat $\mathbb{V}^E_\zeta[\mathcal{F}] \subseteq \mathbb{V}^E_\eta[\mathcal{F}]$ indien $\zeta \leq \eta$

Overdracht: dit volgt eenvoudig uit Stelling 4.2.6(2.) en het Overdrachtsaxioma van HST.

ZFCst: triviaal, aangezien $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{K}$.

Standardisatie: triviaal, aangezien $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{K}$.

Oneindig: Uit Stelling 4.2.6(2.) halen we dat $\mathcal{F}$ een ZFC-universum is. Hierdoor bestaat er een verzameling X dat aan het axioma Oneindig voldoet ten opzichte van $\mathcal{F}$. Door middel van de 'transitiviteit van $\mathbb{I}$' relatief ten opzichte van $\mathcal{K}$ (dus eigenlijk de transitivitiet van $\mathcal{F}$ in het universum $\mathcal{K}$) volgt dat X ook aan het axioma Oneindig voldoet ten opzichte van het universum $\mathcal{K}$. □

4.4 De HST$'_\kappa$-benadering in HST

In deze paragraaf bewijzen we dat er een interne deeluniversum $\mathbb{S}[\zeta]$ bestaat zodat $\mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$ voldoet aan de axioma's van HST$'_\kappa$. Daarna geven we een korte beschrijving van wat werken in HST$'_\kappa$ inhoudt.

4.4.1 Een extern deeluniversum in $\mathbb{H}$ dat voldoet aan HST$'_\kappa$

4.4.1 Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een dun intern deeluniversum zodat $\mathcal{F} \cap ({}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}) \neq \emptyset$. Zij $\mathcal{K} = \mathbb{WF}[\mathcal{F}]$. Dan geldt het volgende.*

1. *$\mathcal{K}$ is een extern deeluniversum en interne kernuitbreiding van $\mathcal{F}$. Bovendien is $\mathcal{K}$ transitief en compleet over $\mathcal{F}$.*

2. *$\mathbb{WF} \subseteq \mathcal{K}$ en elke verzameling $X \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$ is een verzameling van standaard grootte (relatief bekeken ten opzichte van $\mathbb{H}$).*

3. *$\mathcal{K}$ voldoet aan het Machtsverzamelingsaxioma en Goede-Ordeningsstelling (relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$).*

Bewijs. (1.) Dit volgt uit Stelling 4.3.6 en Stelling 4.2.9.

(2.) Dat $\mathbb{WF} \subseteq \mathcal{K}$ halen we uit Stelling 4.3.4. Voor een bewijs dat elke $X \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$ een verzameling van standaard grootte is, verwijzen we naar stelling 6.4.3 in [9].

(3.) *Goede-Ordeningsstelling*: stel $X \in \mathcal{K}$. We wensen aan te tonen dat er een goede ordening op X bestaat relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$. Stel dat $X \notin \mathcal{F}$. Door (2.) toe te passen verkrijgen we dat X een verzameling in $\mathbb{H}$ is van standaard grootte. Hieruit volgt dat er een goede ordening $\prec \in \mathbb{H}$ bestaat op X (wegens Stelling 1.3.41). $\prec$ is een deelverzameling van $X \times X$ en dus ook een verzameling van standaard grootte (wegens Gevolg 1.3.42).

Door de transitivitiet van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ vinden we dat $X \subseteq \mathcal{K}$ en dus geldt voor elke twee elementen $x, y \in X$ dat $(x, y) \in \mathcal{K}$ (wegens Stelling 4.3.4(4.)). Hieruit volgt dat ook $\prec \subseteq \mathcal{K}$. Ofwel is $\prec \in \mathcal{K}$ ofwel is $\prec \notin \mathcal{K}$. In het eerste geval is $\prec$ een goede ordening op X relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$. In het tweede geval volgt uit de compleetheid van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ dat er een $\prec' \in \mathcal{F}$ bestaat zodat $\prec = \prec' \cap \mathcal{F} = \prec' \cap \mathcal{K} \subsetneq \prec'$. $\prec'$ is een goede ordening op X relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$.

Stel nu dat $X \in \mathcal{F}$. Definieer de verzameling $Y := X \cap \mathcal{F} = X \cap \mathcal{K}$. Y is een deelverzameling van $\mathcal{F}$, zodat Y een verzameling van standaard grootte is (wegens $\mathcal{F}$ een dun intern deeluniversum is). Net zoals hierboven kunnen we een goede ordening $\prec$ vinden op Y (bekeken ten opzichte van $\mathbb{H}$) zodat $\prec \subseteq \mathcal{K}$. Indien $\prec$ beperkt tot $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ een element is in $\mathcal{K}$, dan is deze beperking een goede ordening op X (bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$). Indien $\prec$ beperkt tot $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ geen element is in $\mathcal{K}$, dan bestaat er analoog aan hierboven een $\prec' \in \mathcal{F}$ zodat $\prec /(\mathcal{F} \times \mathcal{F}) = \prec' \cap \mathcal{F} = \prec' \cap \mathcal{K} \subsetneq \prec'$. $\prec'$ is een goede ordening op X bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$. We zullen nu aantonen dat dit in beide gevallen daadwerkelijk een goede ordening is op X.
Zij $Z \in \mathcal{K}$ een niet-ledige deelverzameling van X (bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$). Dan is $Z \cap \mathcal{K}$ een niet-ledige deelverzameling van Y, zodat er een $\prec$-minimaal element $z \in Z \cap \mathcal{K}$ bestaat relatief ten opzichte van $\mathbb{H}$ ($Z \cap \mathcal{K}$ is niet ledig, anders zou $Z = \emptyset$ omdat $\mathcal{K}$ extensionaal is). Indien $\prec$ beperkt tot $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ een element is in $\mathcal{K}$, dan is z ook een minimaal element met die ordening van X relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$ omdat $X \cap \mathcal{K} = X \cap \mathcal{F}$ en $z \in Z \cap \mathcal{K} \subseteq Y \subseteq \mathcal{F}$. Indien $\prec$ beperkt tot $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ geen element is in $\mathcal{K}$, dan is z een $\prec'$-minimaal element van X relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$ om dezelfde redenen en omdat $\prec' \in \mathcal{K}$.

Machtsverzamelingsaxioma: stel $X \in \mathcal{K}$. We wensen aan te tonen dat de machtsverzameling $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(X)$ van X bestaat relatief bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$. We mogen aannemen dat $X \neq \emptyset$. Stel dat $X \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Dan is zeker $X \notin \mathcal{F}$, aangezien $\mathcal{F}$ voldoet aan het axioma Extensionaliteit. Dus $X \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{F}$, zodat X een verzameling van standaard grootte is in $\mathbb{H}$ wegens (2.). Bovendien volgt hieruit ook dat $X \subseteq \mathcal{K}$ door de transitiviteit van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$. Uit Gevolg 1.3.42 volgt dat $\mathcal{P}(X)$ bestaat in $\mathbb{H}$. Voor alle (niet-ledige) $Y \subseteq X$ geldt dat Y niet $\mathcal{F}$-verkeerd is, anders zou $X \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, een tegenstrijdigheid. Door de constructie van $\mathbb{WF}[\mathcal{F}]$ volgt dan dat $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{K}$. Bovendien is $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{K}$: indien $\mathcal{P}(X) \notin \mathcal{K}$, zou uit de compleetheid van $\mathcal{K}$ over $\mathcal{F}$ volgen dat $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F}$-verkeerd is zodat $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{F}$. Dan is $\{x\} \in \mathcal{F}$ voor elke $x \in X$, zodat uit Stelling 4.2.6(4.) volgt dat $x \in \mathcal{F}$. Hieruit volgt dat $X \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, een tegenstrijdigheid. We besluiten dat $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(X)$ een verzameling is in $\mathcal{K}$. Voor het geval $X \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ verwijzen we naar de literatuur. □

4.4.2 Stelling. *Indien κ een oneindig goed-gefundeerd kardinaalgetal is, dan bestaat er een dun intern deeluniversum $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{I}_\kappa$, ($\mathcal{F}$ is van de vorm $\mathbb{S}[\zeta]$,) zodat*

- $\mathbb{WF}[\mathcal{F}]$ *een extern deeluniversum is dat voldoet aan HST'_κ.*
- $\mathbb{WF}[\mathcal{F}]$ *een transitieve, complete, interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$ en $\mathbb{WF} \subseteq \mathbb{WF}[\mathcal{F}]$.*

Bewijs. Uit Stelling 4.2.16 volgt dat er een $*$-ordinaalgetal $\zeta < {}^*\kappa$ bestaat, zodat $\mathbb{S}[\zeta]$ een intern dun deeluniversum is dat voldoet aan een zekere vorm van κ-grootte Saturatie (zie de opgave van Stelling 4.2.16). Laat nu $\mathcal{F} = \mathbb{S}[\zeta]$ en $\mathcal{K} = \mathbb{WF}[\mathcal{F}]$. We wensen aan te tonen dat $({}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}) \cap \mathcal{F} = ({}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}) \cap \mathbb{S}[\zeta] \neq \emptyset$, zodat we Stelling 4.4.1 kunnen toepassen. Definieer de functie $f_n \in \mathbb{WF}$ met domein $\{\Lambda\}$ als volgt: $f_n(\Lambda) := \mathbb{N}\backslash\{n\}$ voor $n \in \mathbb{N}$. Door toepassing van $*$-Overdracht op de formule

$$\Phi^{\mathrm{wf}}(f_n, n, \mathbb{N}) \equiv \forall^{\mathrm{wf}} y \forall^{\mathrm{wf}} z((y,z) \in f_n \leftrightarrow z = \mathbb{N}\backslash\{n\} \wedge y = \Lambda).$$

verkrijgen we voor $n \in \mathbb{N}$ dat ${}^*f_n(\Lambda) = {}^*\mathbb{N}\backslash\{{}^*n\} = {}^*\mathbb{N}\backslash\{n\}$ (${}^*n = n$ voor $n \in \mathbb{N}$). Hieruit volgt dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat ${}^*\mathbb{N}\backslash\{n\} \in \mathbb{S}[\zeta]$.
Aangezien we nog steeds werken in HST, kan men door middel van het Collectie-axioma aantonen dat $X := \{{}^*\mathbb{N}\backslash\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ een verzameling is in $\mathbb{H}$. $X \subseteq \mathbb{S}[\zeta]$ is een verzameling van kardinaliteit $\leq \kappa$ en $\bigcap X = {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \neq \emptyset$. Uit de speciale Saturatie-eigenschap van $\mathbb{S}[\zeta]$ in Stelling 4.2.16 halen we dat $({}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}) \cap \mathbb{S}[\zeta] = \bigcap X \cap \mathbb{S}[\zeta] \neq \emptyset$.

Uit Stelling 4.4.1 halen we al veel eigenschappen die we moeten aantonen. Het enige dat we nog moeten aantonen is dat $\mathbb{WF}[\mathcal{F}]$ voldoet aan 'κ-begrensdheid', 'κ-grootte Saturatie', '${}^*\kappa$ is een verzameling van standaard grootte via een interne afbeelding' en 'elke $X \in \mathcal{K}$ is een verzameling van standaard grootte'. We moeten alles relatief bekijken ten opzichte van $\mathcal{K}$.

'κ-begrensdheid': dit volgt uit het feit dat $\mathcal{K} \cap \mathbb{I} = \mathcal{F} = \mathbb{S}[\zeta] \subseteq \mathbb{I}_\kappa$ en Stelling 4.2.11.

'κ-grootte Saturatie': zij $X \subseteq \mathcal{K} \cap \mathbb{I} = \mathcal{F}$ een $\cap$-gesloten verzameling in $\mathcal{K}$ met kardinaliteit $\leq \kappa$ bestaande uit niet-ledige verzamelingen. Uit κ-grootte Saturatie in HST halen we dat $\bigcap X \neq \emptyset$. Uit de speciale Saturatie-eigenschap van $\mathbb{S}[\zeta]$ in Stelling 4.2.16 halen we dat $\bigcap X \cap \mathcal{K} \supseteq \bigcap X \cap \mathbb{S}[\zeta] \neq \emptyset$.

'Elke $X \in \mathcal{K}$ is een verzameling van standaard grootte' (bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$): omdat $\mathcal{K}$ een extern deeluniversum is en omdat Stelling 1.3.41 geldig is in ^{0}HST is dit equivalent met zeggen dat elke verzameling van $\mathcal{K}$ goed-geordend kan worden (bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$). Dit laatste geldt, wegens Stelling 4.4.1.

'${}^*\kappa$ is een verzameling van standaard grootte via een interne afbeelding' (bekeken ten opzichte van $\mathcal{K}$): we wensen aan te tonen dat er een afbeelding $H \in \mathbb{S}[\zeta]$ en een verzameling $Z \in \mathcal{K}$ bestaan zodat ${}^*\kappa \cap \mathcal{K} = {}^*\kappa \cap \mathcal{F} = \{H(x) \mid x \in Z \cap \mathbb{S}\} \cap \mathcal{K}$. (${}^*\kappa \cap \mathcal{K} = {}^*\kappa \cap \mathbb{S}[\zeta]$ omwille van $\mathbb{S}[\zeta] = \mathcal{K} \cap \mathbb{I}$, ${}^*\kappa \in \mathbb{I}$ en $\mathbb{I}$ transitief.) Omdat $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{F} = \mathbb{S}[\zeta]$, wegens Stelling 4.2.6, is ${}^*\kappa \in \mathbb{S}[\zeta]$.
Bekijk de standaard verzameling $F = {}^*(\mathcal{F}(\kappa,\kappa))$. Dit is de verzameling van alle interne functies van ${}^*\kappa$ naar ${}^*\kappa$. Nu is $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}[\zeta]$ en is $\mathbb{S}[\zeta]$ een ZFC-universum, wegens Stelling 4.2.6, zodat we in dit universum $H \in \mathbb{S}[\zeta]$ kunnen definiëren: $H = \{(x,y) \in (F \times_{\mathbb{S}[\zeta]} {}^*\kappa) \mid x \in F \wedge (\zeta, y) \in x\}$, waarbij $F \times_{\mathbb{S}[\zeta]} {}^*\kappa$ betekent dat we kijken relatief ten opzichte van

$\mathbb{S}[\zeta]$. Voor elke $f \in F \cap \mathbb{S}[\zeta]$ met $f(\zeta) \in \mathbb{S}[\zeta]$ geldt dus dat $H(f) = f(\zeta)$. Stel nu f gelijk aan $\{(\zeta, \xi)\}$ voor een willekeurige $\xi \in {}^*\kappa \cap \mathbb{S}[\zeta]$. Dan is f een eindige deelverzameling van $({}^*\kappa \times {}^*\kappa) \in \mathbb{S}$, zodat $f \in \mathbb{S}$. Hieruit volgt dat het beeld van H onder $F \cap \mathbb{S}$, doorsnede $\mathcal{K}$, gelijk is aan ${}^*\kappa \cap \mathbb{S}[\zeta] = {}^*\kappa \cap \mathcal{K}$. □

4.4.2 Werken in $\mathbf{HST}'_\kappa$

Modeltheoretisch is κ-grootte Saturatie voldoende om mee te werken, waardoor het niet zo erg is om naar partiële gesatureerde theorieën te kijken. Werken in HST'_κ heeft als voordeel dat we met het volledige Keuze-axioma kunnen werken en dat het Machtsverzamelingsaxioma bovendien toepasbaar is. Men kan werken met de axioma's van HST'_κ in een HST'_κ-universum, zonder rekening te houden met wat er buiten dat universum zich bevindt. We moeten wel rekening houden met de restricties die de axioma's opleggen. Bijvoorbeeld is in HST'_κ elke verzameling van standaard grootte.
Indien we de HST'_κ-benadering in HST gebruiken, met andere woorden we gebruiken $\mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$ in HST, dan moeten we erop wijzen dat elke deelverzameling van $\mathbb{S}[\zeta]$ van standaard grootte is. Indien we een bepaalde structuur $\mathcal{M} \in \mathbb{WF}$ hebben, dan kan het zijn dat ${}^*\mathcal{M} \not\subseteq \mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$ (wel geldt er dat $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$), zelfs indien we κ groot genoeg kiezen.[20]

Natuurlijk geldt wel ${}^*\mathcal{M} \cap \mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]] \subseteq \mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$, zodat men altijd relatief ten opzichte van $\mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$ kan werken (zo werkt men in de theorie HST'_κ). Dat er een structuur $\mathcal{M} \in \mathbb{WF}$ bestaat waarvoor ${}^*\mathcal{M} \not\subseteq \mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$ kan als een nadeel van HST'_κ beschouwd worden. Gelukkig bestaat er ook een concept 'absoluutheid':

4.4.3 Stelling. *Zij $\mathcal{F}$ een intern deeluniversum en $\mathcal{K}$ een extern deeluniversum dat een transitieve interne kernuitbreiding is van $\mathcal{F}$. Dan zijn de eigenschappen 'x is een ongeordend paar', 'x is een geordend paar', 'f is een functie', 'f is een functie en $f(x) = y$', 'x is een natuurlijk getal', 'x is een eindige verzameling' absoluut voor $\mathcal{K}$*

Voor een bewijs verwijzen we naar Lemma 6.3.8 in [9]. Voor bepaalde concepten betekent dit dat werken in $\mathbb{H}$ en werken in $\mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$ hetzelfde is.

4.5 De $\mathbf{HST}_\kappa$-benadering in HST

In Paragraaf 4.4 is $\mathcal{F}$ een dun universum, zodat alle deelverzamelingen van $\mathcal{F}$ verzamelingen van standaard grootte zijn. Daardoor is het Machtsverzamelingsaxioma geldig in $\mathbb{WF}[\mathcal{F}]$. Indien $\mathcal{F}$ niet dun is, valt dit argument in duigen. In deze paragraaf geven we een andere constructie van externe deeluniversa, denkend aan de constructie van $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$. Daarbij hebben we $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ gedefinieerd als $\{A_x \mid x \in \mathbf{A}\}$ met $\mathbf{A}$ de klasse van alle reguliere A-codes die in $\mathbb{E}$ zitten. $\mathbb{E}$ was de eerste laag van externe verzamelingen op $\mathbb{I}$: $\mathbb{E} = \{E_p \mid p \text{ is een } E\text{-code}\} = \{E_p \mid p \in \mathbb{I}\}$. Een E-code was een interne functie met als domein $A \times B$, met A en B twee standaard verzamelingen. Dit resulteert in de volgende algemene definities. We gebruiken

[20] Indien dit wel geldt, dan is ${}^*\mathcal{M} \subseteq \mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]] \cap \mathbb{I} = \mathbb{S}[\zeta]$, zodat ${}^*\mathcal{M}$ een verzameling van standaard grootte is. Dit kan niet het geval zijn indien ${}^*\mathcal{M}$ oneindig is wegens Hulpstelling 1.4.1(1.).

verscheidene begrippen die we reeds hebben ingevoerd in Hoofdstuk 3. We geven niet alle bewijzen, maar toch hebben we getracht een zo goed mogelijk globaal beeld te geven, dat voldoende is om in HST_κ te werken.

4.5.1 Definitie. Zij $\mathcal{F}$ een intern deeluniversum. Definieer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{F}] &:= \{E_p \mid p \in \mathcal{F}\}, \\ \mathbf{A'}[\mathcal{F}] &:= \text{alle } A\text{-codes } x \in \mathbb{E}[\mathcal{F}] \text{ zodat } T_x \subseteq \mathcal{F} \text{ en } range(x) \subseteq \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Merk op dat in ook Hoofdstuk 3 voor A-codes in $\mathbb{E}$, $T_x \subseteq \mathbb{I}$ en $range(x) \subseteq \mathbb{I}$.

4.5.2 Definitie. Een element $x \in \mathbf{A'}[\mathcal{F}]$ wordt $\mathcal{F}$-regulier genoemd als voor elke $t \in T_x$, met $|t|_{T_x} = 1$, geldt dat $F_x(t) = \{F_x(t\hat{}a) \mid t\hat{}a \in T_x\} = \{x(t\hat{}a) \mid a \in \mathrm{Succ}_{T_x}(t)\}$ niet van de vorm $z \cap \mathcal{F}$ is voor een zekere $z \in \mathcal{F}$.

4.5.3 Definitie. $\mathbf{A}[\mathcal{F}] :=$ alle $\mathcal{F}$-reguliere A-codes $x \in \mathbf{A'}[\mathcal{F}]$.

Definieer uiteindelijk

4.5.4 Definitie. $\mathbb{L}[\mathcal{F}] := \{A_x \mid x \in \mathbf{A}[\mathcal{F}]\}$.

Indien $\mathcal{F} = \mathbb{I}$, dan komen vorige definities overeen met de reeds ingevoerde definities in Hoofdstuk 3.
We zijn geïnteresseerd in een deeluniversum van $\mathbb{H}$ dat voldoet aan HST_κ. Dit is zo, indien $\mathcal{F} = \mathbb{I}_\kappa$. We geven nu de volgende stelling die een overzicht geeft van alle belangrijke eigenschappen van $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$. We hebben getracht een zo goed mogelijk globaal beeld te geven dat voldoende is om in HST_κ te werken. Voor een bewijs verwijzen we naar de literatuur (bijvoorbeeld Hoofdstuk 6 in [9]).

4.5.5 Stelling.

1. *Zij $X \subseteq \mathbb{I}$ een verzameling st-$\in$-definieerbaar in $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ met parameters in $\mathbb{E}[\mathbb{I}_\kappa] \cup \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$. Dan behoort X tot $\mathbb{E}[\mathbb{I}_\kappa]$. Indien X bovendien intern is, behoort X tot $\mathbb{I}_\kappa$.*

2. *Zij $Y \subseteq \mathbb{L}[\mathcal{F}]$ een verzameling st-$\in$-definieerbaar in $\mathbb{L}[\mathbb{I}]$ met parameters in $\mathbb{E}[\mathcal{F}] \cup \mathbb{L}[\mathcal{F}]$. Dan is ofwel $Y \in \mathbb{L}[\mathcal{F}]$, ofwel $Y = z \cap \mathcal{F}$ voor een zekere $z \in \mathcal{F}$.*

3. *Als $x \in \boldsymbol{A}[\mathbb{I}_\kappa]$ en $t \in T_x$, dan $x_{/t} \in \boldsymbol{A}[\mathbb{I}_\kappa]$.*

4. *$\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa] \cap \mathbb{I} = \mathbb{I}_\kappa$.*

5. *Als $X \in \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ en $X \subseteq \mathbb{I}$, dan is X niet $\mathbb{I}_\kappa$-verkeerd.*

6. *$\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ is extensionaal en transitief over $\mathbb{I}_\kappa$.*

7. *Elke $X \subseteq \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ van kardinaliteit $\leq 2^\kappa$ behoort tot $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$.*

8. *$\mathbb{WF} \subseteq \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$.*

9. *$\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ voldoet aan HST_κ.*

4.5.1 Werken in HST_κ

Één van de voordelen van HST_κ, is dat HST_κ het Machtsverzamelingsaxioma bevat. Het volledige Keuze-axioma is niet geldig, maar dit kan opgelost worden door onze κ groot genoeg te kiezen: indien we een bepaalde structuur $\mathcal{M} \in \mathbb{WF}$ of toepassing willen bestuderen, kiezen we κ groot genoeg, zodat we voldoende 'keuze' voorhanden hebben. (HST_κ voldoet namelijk aan 2^κ-grootte Keuze.) Indien we een bepaalde toepassing willen bestuderen, is er dus niet echt een nadeel om HST_κ te kiezen in plaats van HST'_κ.
Bovendien kunnen we, in tegenstelling tot HST'_κ, er nu wel voor zorgen dat ${}^*\mathcal{M} \subseteq \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ voor een $\mathcal{M} \in \mathbb{WF}$. ${}^*\mathcal{M}$ is namelijk een standaard verzameling en alle elementen van ${}^*\mathcal{M}$ zijn intern. Indien we κ groot genoeg kiezen (bijvoorbeeld $\kappa = \mathrm{Kard}(\mathcal{M})$) zitten al de elementen van ${}^*\mathcal{M}$ in $\mathbb{I}_\kappa$ en dus ook in $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$.
$\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ is dus handiger dan $\mathbb{WF}[\mathbb{S}[\zeta]]$, zodat we eerder geneigd zijn om te werken in HST_κ, dan in HST'_κ.

4.6 Toepassingen

In deze paragraaf geven we enkele korte toepassingen op het gebruik van partiële gesatureerde deeluniversa. Hieruit zal blijken hoe men hierin moet werken. Dit verschilt niet zoveel van werken in HST, behalve dat men het Machtsverzamelingsaxioma heeft en men moet opletten of alles wat we gebruiken wel in ons universum vervat zit. Door het kardinaalgetal κ voldoende groot te kiezen kan men hieraan voldoen.

4.6.1 Borelverzamelingen

Beschouw in HST een hypernatuurlijk getal $H \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ en bekijk $\{1,\ldots,H\} \subseteq {}^*\mathbb{N}$. $Borel(\{1,\ldots,H\})$ is de kleinste σ-algebra die alle interne deelverzamelingen van $\{1,\ldots,H\}$ bevat. In ZFC zou men dit aantonen door middel van het Machtsverzamelingsaxioma, terwijl in HST men dit zou kunnen aantonen door 'Extensie van $\mathbb{I}$' en door te kijken naar enkel die deelverzamelingen die nodig zijn. We zullen dit op een andere manier bewijzen.
$Borel(\{1,\ldots,H\})$ is de kleinste σ-algebra die $\mathcal{P}_{\text{int}}(\{1,\ldots,H\})$ bevat. Indien we één σ-algebra vinden die $\mathcal{P}_{\text{int}}(\{1,\ldots,H\})$ bevat, dan kunnen we $Borel(\{1,\ldots,H\})$ gelijk stellen aan de doorsnede van al de σ-algebra's die $\mathcal{P}_{\text{int}}(\{1,\ldots,H\})$ bevat als deelverzameling. We hebben het probleem dus herleid tot het vinden van één σ-algebra, niet noodzakelijk de kleinste, die $\mathcal{P}_{\text{int}}(\{1,\ldots,H\})$ bevat. Omdat $\mathcal{P}(\{1,\ldots,H\})$ niet bestaat in $\mathbb{H}$, hebben we een probleem. We zullen dit probleem oplossen in HST_κ. Voor de eenvoud noteren we $\mathcal{H} = \{1,\ldots,H\}$.

Fixeer één goed-gefundeerd oneindig kardinaalgetal κ (bijvoorbeeld $\kappa = \aleph_1$). Door de constructie van $\mathbb{I}_\kappa$ is ${}^*\mathbb{N} \subseteq \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$, $\mathcal{H} \in \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ en $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$. Dus $P_\kappa = \mathcal{P}(\mathcal{H})^{\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]}$ (de machtsverzameling van $\mathcal{H}$ bekeken ten opzichte van $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$) is een verzameling in $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ en $\mathcal{P}(\mathcal{H})^{\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]} = \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$. Indien we kunnen aantonen dat P_κ een σ-algebra is, is ons probleem opgelost, aangezien $\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathcal{H}) \subseteq P_\kappa$.[21] Het enige niet-triviale dat we daarvoor moeten aantonen is dat P_κ gesloten is onder aftelbare unie. Omdat elke deelverzameling van $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ van kardinaliteit $\leq 2^\kappa$ tot $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ behoort, behoort elke aftelbare rij van elementen van $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$ zelf ook tot $\mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$. Hieruit volgt eenvoudig dat P_κ gesloten is onder aftelbare unie. P_κ is dus een σ-algebra, zodat $Borel(\{1,\ldots,H\})$ bestaat in $\mathbb{H}$.

4.6.2 Loeb-meetbare verzamelingen

Zij bijvoorbeeld μ een eindige additieve maat op $\mathcal{H} = \{1,\ldots,H\}$ met $H \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. We weten dat de collectie van alle Loeb-meetbare verzamelingen $\mathcal{L}(\mu)$ niet noodzakelijk een verzameling is in HST. Indien men een bepaalde eigenschap van deze klasse wil bestuderen, kijken we eerst hoeveel saturatie we ervoor nodig hebben. Kies dan κ groot genoeg om aan alle eisen te voldoen en definieer $\mathcal{L}(\mu)_\kappa = \mathcal{L}(\mu) \cap \mathbb{L}[\mathbb{I}_\kappa]$. $\mathcal{L}(\mu)_\kappa$ is een verzameling en een goede benadering om mee te werken in plaats van $\mathcal{L}(\mu)$.

[21] Dit is zo, aangezien elke interne deelverzameling van $\mathcal{H}$ een element is van ${}^*(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = \mathcal{P}_{\text{int}}({}^*\mathbb{N})$ en $\text{kard}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \leq \kappa$.

Algemeen besluit

Het HST-universum $\mathbb{H}$ bevat verscheidene ZFC-universa, namelijk $\mathbb{WF}$, $\mathbb{S}$ en $\mathbb{I}$. $\mathbb{WF}$ is de klasse van alle goed-gefundeerde verzamelingen, $\mathbb{S}$ is de klasse van alle standaard verzamelingen en $\mathbb{I}$ is de klasse van alle interne verzamelingen. We laten de traditionele wiskunde overeenkomen met één van die universa, namelijk $\mathbb{WF}$. In HST bestaat er een $\in$-isomorfisme tussen $\mathbb{WF}$ en $\mathbb{S}$, waardoor men een benadering van het modeltheoretisch beeld verkrijgt in $\mathbb{H}$: er bestaat een $\in$-inbedding van de traditionele wiskunde $\mathbb{WF}$ naar de klasse van de interne verzamelingen $\mathbb{I}$.

HST is een niet-standaard verzamelingentheorie die men kan gebruiken om de traditionele wiskunde op een eenvoudige manier te bestuderen, net zoals men een niet-standaard model van de reële analyse gebruikt om de gewone reële analyse anders te benaderen. Hierbij maakt men veelvuldig gebruik van de afbeelding *. In Hoofdstuk 2 toonden we aan dat de meeste modeltheoretische niet-standaard technieken, zoals Overdracht en Overloop, geldig blijven in HST. HST bevat zoveel meer dan een gewoon model van de niet-standaard analyse: men kan werken met ordinalen. kardinalen, goede ordeningen, enzovoort. Bovendien is HST een verzamelingentheorie, net zoals ZFC, die enkele kenmerkende principes van zo'n theorie bevat, bijvoorbeeld de Von Neumann hiërarchie, en die men dus ook kan bestuderen op metawiskundige eigenschappen.
Het enige ernstige probleem in HST stelt zich wanneer men het Machtsverzamelingsaxioma nodig heeft. Veelal kan men dit axioma omzeilen, maar soms is het toch noodzakelijk om dit axioma voorhanden te hebben. Dan nog kan men ervoor kiezen om te werken met de machtsklasse (dit komt neer op het werken met de formule die machtsklasse uitdrukt), zonder na te denken of het wel of niet een verzameling is. Indien dit niet voldoende is, kan men opteren om te werken in partiële gesatureerde theorieën die het Machtsverzamelingsaxioma wel bevatten (zie Hoofdstuk 4). In Hoofdstuk 4 hebben we aangetoond dat er deeluniversa van $\mathbb{H}$ bestaan die voldoen aan deze theorieën, zodanig dat men altijd kan werken met het Machtsverzamelingsaxioma in $\mathbb{H}$, indien men zich beperkt tot die deeluniversa.

Bijlage A

$\mathcal{L}$-Structuren

In deze bijlage geven we definities en meer uitleg over 'talen' en 'structuren'. Voor een uitgebreidere uiteenzetting verwijzen we naar de literatuur, bijvoorbeeld [10].

A.0.1 Definitie. Algemeen bestaat een **eerste-orde taal** $\mathcal{L}$ uit een drietal verzamelingen van symbolen: een verzameling constanten, een verzameling functiesymbolen en een verzameling relatiesymbolen. Voor elk functiesymbool en relatiesymbool bestaat er een getal n dat het aantal argumenten voorstelt waarop het functie- of relatiesymbool werkt. Dit getal n wordt de ariteit van het symbool genoemd. Bovendien stelt men ook dat elke taal $\mathcal{L}$ de haakjes (en) bevat en de volgende symbolen:

1. Een oneindige aftelbare verzameling van variabelen. Deze wordt meestal voorgesteld door $x, y, z, \ldots$ of $x_0, x_1, \ldots$
2. Het gelijkheidssymbool $=$[1]
3. Het symbool $\neg$ ('niet')
4. Het symbool $\wedge$ ('en')
5. Het symbool $\vee$ ('of')
6. Het symbool $\rightarrow$ of $\Rightarrow$ ('impliceert')
7. Het symbool $\exists$ ('er bestaat')
8. Het symbool $\forall$ ('voor alle')

Symbolen 3-6 worden logische connectoren genoemd. Symbolen 7-8 worden kwantoren genoemd.

Deze symbolen zijn nodig om termen en formules op te bouwen.

[1] Dit is in feite een speciaal binair relatiesymbool.

A.0.2 Definitie. Zij X een verzameling of klasse en $\mathcal{L}$ een taal. De **complete uitgebreidde taal** op X is de taal

$$\mathcal{L}_X = \mathcal{L} \cup \{\mathbf{x} \mid \mathrm{x} \in X\} \cup \{\mathbf{R} \mid \mathrm{R} \subseteq X^n\} \cup \{\mathbf{F} \mid \mathrm{F}\colon X^n \to X\}.$$

Merk op dat $\mathcal{L}_X$ geen verzameling meer is, indien X een klasse is.

A.0.3 Definitie. De verzameling van **termen** van een taal $\mathcal{L}$ wordt inductief gedefinieerd:

- Alle constanten van $\mathcal{L}$ zijn termen van $\mathcal{L}$.
- Alle variabelen zijn termen van $\mathcal{L}$.
- Als $t_1, \ldots, t_n$ termen zijn van $\mathcal{L}$ en f is een n-air functiesymbool van $\mathcal{L}$, dan is $f(t_1, \ldots, t_n)$ een term van $\mathcal{L}$.

De verzameling van de termen wordt genoteerd als T.

Een term wordt gesloten genoemd indien hij geen variabelen bevat.

A.0.4 Definitie. De verzameling van **formules** van een taal $\mathcal{L}$ wordt inductief gedefinieerd:

- Als t en s termen zijn, dan is $(t = s)$ een formule van $\mathcal{L}$.
- Als $t_1, \ldots, t_n$ termen zijn van $\mathcal{L}$ en R is een n-air relatiesymbool van $\mathcal{L}$, dan is $R(t_1, \ldots, t_n)$ een formule van $\mathcal{L}$.
- Als ϕ en ψ formules zijn van $\mathcal{L}$, dan zijn $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\neg\phi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$ formules van $\mathcal{L}$.
- Als ϕ een formule is van $\mathcal{L}$, dan is $\forall x\phi$ en $\exists x\phi$ een formule van $\mathcal{L}$.

Een variabele die bij een kwantor voorkomt in de formule wordt gebonden genoemd. De overige variabelen worden vrij genoemd. Een gebonden variabele is een dummy variabele: zo hebben $\forall x\phi(x)$ en $\forall y\phi(y)$ dezelfde betekenis. We nemen aan dat we voor een variabele bij een kwantor altijd een variabele gebruiken die nog niet in de formule voorkomt. Daardoor is elke variabele nooit terzelfdertijd gebonden en vrij en wordt elke variabele hoogstens één keer gebonden. We noteren $\phi(x, y, \ldots)$ om te zeggen dat $x, y \ldots$ vrij voorkomt in ϕ. $\phi(a)$ betekent dan dat we het element a invullen in de vrije variabele x.

A.0.5 Definitie. Een $\mathcal{L}$-formule wordt **atomair** genoemd indien er geen $\forall$ en $\exists$ in optreden.

A.0.6 Definitie. Een **$\mathcal{L}$-zin** is een $\mathcal{L}$-formule zonder vrije variabelen.

A.0.7 Definitie. Een **$\mathcal{L}$-theorie $\mathcal{T}$** is een verzameling van $\mathcal{L}$-formules.

A.0.8 Definitie. Een **$\mathcal{L}$-structuur** $\mathcal{M}$ is een koppel $(M, \mathcal{I})$ met M een niet-ledige verzameling (of klasse[2]) en $\mathcal{I}$ een functie op de symbolen van $\mathcal{L}$ zodat voor elke constante c van $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}(c)$ een element is van M, voor elke n-air functiesymbool f van $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}(f)$ een functie is van M^n naar M, voor elke n-air relatiesymbool R van $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}(R)$ een deelverzameling is van M^n. We noemen $\mathcal{I}$ de interpretatiefunctie. $\mathcal{I}(a)$ wordt ook genoteerd als $a^{\mathcal{M}}$.

Een $\mathcal{L}$-structuur $\mathcal{M}$ is ook altijd een $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$-structuur door de, op zicht triviale, interpretaties te nemen van de extra symbolen.
Inductief kunnen we eenvoudig een interpretatie van $\mathcal{L}$-termen in $\mathcal{M}$ definiëren. Daarbij is $t^{\mathcal{M}} \in M$ voor alle gesloten termen $t \in T$. Indien $t \in T$ n vrije variabelen bevat, kan men $t^{\mathcal{M}}$ zien als een functie van M^n naar M. We gaan hier niet verder op in.
We geven nu een informele definitie van de notie 'ϕ is waar in $\mathcal{M}$' ($\mathcal{M} \models \phi$), aangezien dit voldoende is voor ons onderwerp. Zij $\mathcal{L}$ een eerste-orde taal, $\mathcal{M}$ een $\mathcal{L}$-structuur en ϕ een $\mathcal{L}$-zin. Dan is $\mathcal{M} \models \phi$ indien we alle constanten, functiesymbolen en relatiesymbolen vervangen door hun interpretaties en indien we $\forall$ en $\exists$ opvatten in de verzameling M. De logische connectoren worden vervangen door wat ze betekenen. Bijvoorbeeld is voor een relatiesymbool R

$$\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}, \ldots t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n.$$

We merken op dat dit formeel op metawiskundig niveau wordt gedefinieerd. Indien ϕ vrije variabelen $x_1, \ldots, x_n$ bevat, dan is ϕ waar in $\mathcal{M}$ als $\mathcal{M} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \phi(x_1, \ldots, x_n)$. Dit noteren we ook als $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)$, waarbij $m_1, \ldots, m_n$ willekeurige elementen zijn van $\mathcal{M}$. $m_1, \ldots, m_n$ worden parameters genoemd.

A.0.9 Definitie. Een **$\mathcal{L}$-deelstructuur** $\mathcal{N}$ van een $\mathcal{L}$-structuur $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ is een koppel $(N, \mathcal{J})$ zodat $N \subseteq M$ en $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$ voor alle constanten c van $\mathcal{L}$, $f^{\mathcal{M}}/N^n = f^{\mathcal{N}}$ voor alle functiesymbolen f van $\mathcal{L}$ en $R^{\mathcal{M}} \cap N^n = R^{\mathcal{N}}$ voor alle relatiesymbolen R van $\mathcal{L}$.

A.0.10 Definitie. Een deelstructuur $\mathcal{N}$ van $\mathcal{M}$ is **elementair** als voor alle $\mathcal{L}$-fomules ϕ geldt dat $\forall n_1, \ldots, n_k \in N(\mathcal{N} \models \phi(n_1, \ldots, n_k) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi(n_1, \ldots, n_k))$[3].

A.0.11 Definitie. Stel T_1 en T_2 zijn twee theorieën, met respectievelijke taal $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$. Een **interpretatie van T_2 in T_1** is een $\mathcal{L}_2$-structuur $\mathcal{M}$, definieerbaar in de taal $\mathcal{L}_1$, zodat het bewijsbaar is in T_1 dat $\mathcal{M}$ voldoet aan T_2.

A.0.12 Definitie. Een **model** is een structuur $\mathcal{M} = (M, \mathcal{I})$ waarbij M en $\mathcal{I}$ verzamelingen zijn. Soms bedoelt men met een model ook een $\mathcal{L}$-structuur die voldoet aan een bepaalde $\mathcal{L}$-theorie T.

[2] Een klasse is een collectie van verzamelingen $X = \{x \mid \phi(x)\}$ met ϕ een formule die willekeurige verzamelingen als parameters mag bevatten. De formule $\phi(x)$ stelt dus '$x \in X$' voor.

[3] Nu betekent $\mathcal{N} \models \phi(n_1, \ldots, n_k)$ wel niet $\mathcal{N} \models \forall x_1 \ldots \forall x_k \phi(x_1, \ldots, x_k)$, maar houden we $n_1, \ldots, n_k$ vast en werken we met $\phi(n_1, \ldots, n_k)$ als een $\mathcal{L}_N$-formule.

De modeltheorie levert ons een zekere $\in$-formule Form$(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \Phi)$ op, die zegt dat $\mathcal{L}$ een taal is, $\mathcal{M}$ een $\mathcal{L}$-model en Φ een $\mathcal{L}$-formule met verzamelingen uit M als parameters. Modeltheorie levert ons ook een zekere $\in$-formule True$(\mathcal{M}, \Phi)$ op, die zegt dat $\mathcal{M}$ een structuur is in de taal van Φ en Φ is waar in $\mathcal{M}$. Met andere woorden we kunnen $\mathcal{M} \models \Phi$ uitdrukken met een $\in$-formule True. De uitspraak 'Φ is waar in $\mathcal{M}$' in de definitie van de $\in$-formule True betekent dat er een valideringsfunctie τ bestaat op de verzameling van alle deelformules van Φ (waarbij alle vrije variabelen worden vervangen door elementen van M als parameters) naar de verzameling $\{true, false\}$ met $\tau(\Phi) = true$. Een valideringsfunctie is een afbeelding zodat

1. τ behoudt relaties $R \in \mathcal{L}$, met andere woorden $\tau(R(x_1, \ldots, x_k)) = true \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_k) \in R^{\mathcal{M}}$

2. $\tau(\phi \wedge \psi) = true$ als en slechts als $\tau(\phi) = true$ en $\tau(\psi) = true$. Analoge definitie voor $\vee$ en $\neg$.

3. $\tau(\exists x \phi(x)) = true$ als en slechts als $\tau(\phi(x)) = true$ voor een $x \in M$. Analoge definitie voor $\forall$.

We hebben nu twee definities van waarheid gezien ($\Phi^{\mathcal{M}}$ [4] en $\mathcal{M} \models \Phi$). Voor alle eindige vaste talen $\mathcal{L}$ is het een stelling in HST en ZFC dat voor alle $\mathcal{L}$-modellen $\mathcal{M}$ geldt dat voor alle $x_1, \ldots, x_n \in M : \Phi^{\mathcal{M}}(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

[4] zie Definitie 1.1.8. Dit is geldig indien '$x \in \mathcal{M}$' kan uitgedrukt worden met een $\mathcal{L}$-zin, wat zeker zo is indien M een verzameling is.

Bijlage B

De axioma's van ZF(C)

In deze bijlage geven we de axioma's van ZF(C). We merken op dat we ons niet beperken tot het geven van een minimum aantal axioma's, met andere woorden: sommige axioma's kunnen overtollig zijn. Bijvoorbeeld kan men het Vervangingsaxioma afleiden uit het Collectie-axioma. We geven ze allemaal voor een klaardere kijk op de basisaxioma's.
De Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer is een theorie met taal $\mathcal{L}$ die bestaat uit een 2-air relatiesymbool '$\in$' die de gebruikelijke betekenis heeft. (Het relatiesymbool $=$ zit er altijd in.) In ZFC hebben we ook de gebruikelijke logische symbolen (connectoren, kwantoren,...). De variabelen in de axioma's staan voor verzamelingen. Voor een verdere uiteenzetting verwijzen we naar de literatuur, bijvoorbeeld [6].

- *Extensionaliteit (Extentionality)*: $\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \leftrightarrow X = Y)$.

Twee verzamelingen zijn gelijk als en slechts als ze dezelfde elementen bevatten.

- *Paar (Pair)*: $\forall X \forall Y \exists Z \forall w (w \in Z \leftrightarrow (w = X \vee w = Y))$.

Voor elke twee verzamelingen X en Y is $\{X, Y\}$ een verzameling.

- *Unie (Union)*: $\forall X \exists Y \forall w (w \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge w \in z))$.

Voor elke verzameling X bestaat er een verzameling Y die alle elementen van de elementen van X bevat en geen enkel ander element. Deze verzameling wordt genoteerd als $\bigcup X$.

B.0.13 Notatie. $X \cup Y$ is een notatie voor $\bigcup Z$ met $Z = \{X, Y\}$.

- *Separatie (Separation)*: $\forall X \exists Y \forall w (w \in Y \leftrightarrow (w \in X \wedge \phi(w)))$, met ϕ een $\in$-formule die de variabele Y niet bevat. De formule ϕ mag parameters bevatten.[1]

[1] Met 'ϕ mag parameters bevatten' bedoelen we dat ϕ vrije variabelen mag bevatten. Formeel gesproken betekent dit dat het Separatie-axioma er als volgt uitziet: $\forall x_1 \ldots \forall x_n [\forall X \exists Y \forall w (w \in Y \leftrightarrow (w \in X \wedge \phi(w, x_1, \ldots, x_n)))]$ voor elke $\in$-formule ϕ met vrije variabelen $w, x_1, \ldots, x_n$ verschillend van Y. Zoals afgesproken in Bijlage A noteren we dit door al de elementen van ons ZFC-universum in te vullen in die vrije variabelen. Deze elementen worden parameters genoemd.

Dit betekent dat voor elke verzameling X en eigenschap ϕ, $\{w \in X \mid \phi(w)\}$ een verzameling is.

- *Collectie (Collection)*: $\forall X \exists Y \forall x(x \in X \to (\exists y \phi(x,y) \to \exists y(y \in Y \wedge \phi(x,y))))$, met ϕ een $\in$-formule. De formule ϕ mag parameters bevatten.

Dit betekent dat voor elke meerwaardige functie ϕ we een stuk van zijn beelden in elk punt x kunnen opvangen in een verzameling Y. (Een meerwaardige functie is een 'functie' die noodzakelijk één element als beeld heeft. De benaming 'meerwaardige *functie*' is hier dus niet echt op zijn plaats.)

- *Vervanging (Replacement)*: $\forall a \exists b \forall c(\phi(a,c) \leftrightarrow c = b) \to \forall X \exists Y \forall x(x \in X \to \exists y(y \in Y \wedge \phi(x,y)))$, met ϕ een $\in$-formule. De formule ϕ mag parameters bevatten.

Dit betekent dat voor elke afbeelding ϕ we zijn beeld kunnen opvangen in een verzameling Y, m.a.w. ϕ beeldt een verzameling af op een verzameling. Dit axioma kan men echter afleiden uit het Collectie-axioma.

- *Oneindig (Infinity)*: $\exists X(\emptyset \in X \wedge \forall y(y \in X \to (y \cup \{y\}) \in X))$.

Er bestaat een oneindige verzameling. $\emptyset$ is een notatie voor de unieke ledige verzameling: uit het axioma Separatie, met een formule die nooit geldig is, krijgen we een verzameling zonder elementen. Uit het axioma Extensionaliteit volgt dat deze verzameling uniek is.

- *Machtsverzameling (Powerset)*: $\forall x \exists y \forall w(w \in y \leftrightarrow \forall z(z \in w \to z \in x))$.

Voor elke verzameling x is $\mathcal{P}(x)$ een verzameling.

- *Regulariteit (Regularity)*: $\forall X(\neg(X = \emptyset) \to \exists x(x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$

Elke niet-ledige verzameling X heeft een element dat disjunct is van X. Dit axioma wordt ook het Funderingsaxioma genoemd. Het zegt dat alle verzamelingen X een $\in$-minimaal element hebben, namelijk de x uit het axioma.
Uit het laatste axioma volgen enkele interessante eigenschappen:

B.0.14 Stelling.

1. *Elke verzameling van ZFC is goed-gefundeerd volgens Definitie 1.2.10.*
2. *Er bestaat geen verzameling X zodat $X \in X$.*
3. *Er bestaan geen oneindig $\in$-dalende rijen. Dit betekent dat er geen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestaat waarvoor geldt dat $x_{n+1} \in x_n$ voor alle n in $\mathbb{N}$.*

Bewijs. (1.) Kies een willekeurige verzameling x uit een ZFC-universum. Dan is de transitieve sluiting $\mathrm{tc}(x)$[2] van x een transitieve[3] verzameling die x bevat als deelverzameling. Bovendien is $\in/\mathrm{tc}(x)$ een goed-gefundeerde relatie. Kies namelijk een niet-ledige deelverzameling $Y \subseteq \mathrm{tc}(x)$. Uit het axioma Regulariteit halen we dat Y een $\in$-minimaal element heeft, dat ook een $\in/\mathrm{tc}(x)$-minimaal element is. We besluiten dat x een goed-gefundeerde verzameling is.

(2.) Zij namelijk X een verzameling zodat $X \in X$ en bekijk de verzameling $Y = \{X\}$. Uit het Regulariteitsaxioma halen we dat $X \cap \{X\} = \emptyset$. Dit kan echter niet omdat $X \in X \cap \{X\}$, een tegenstrijdigheid.

(3.) Stel dat er wel een oneindig $\in$-dalende rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestaat en definieer

$$X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(X is een verzameling door het axioma Vervanging, aangezien een rij gezien wordt als een functie met domein $\mathbb{N}$.) Uit het axioma Regulariteit volgt dat een verzameling $x \in X$ bestaat zodat $x \cap X = \emptyset$. x is gelijk aan een zekere x_n, zodat $x_{n+1} \in x \cap X = \emptyset$, een tegenstrijdigheid. $\square$

In ZFC zorgt het Regularisteitsaxioma ervoor dat men een mooi beeld heeft van elk ZFC-universum $\mathbb{V}$, namelijk de Von Neumann hiërarchie: $\mathbb{V} = \bigcup_{\xi\in\mathrm{Ord}} \mathbb{V}_\xi$ met Ord de verzameling van de ordinalen in ZFC (zie Bijlage D). Daarbij is

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &:= \emptyset, \\ \mathbb{V}_{\xi+1} &:= \mathcal{P}(\mathbb{V}_\xi), \\ \mathbb{V}_\lambda &:= \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbb{V}_\xi \text{ met } \lambda \text{ een limietordinaal.} \end{aligned}$$

De verzamelingen $\mathbb{V}_\xi$ worden gedefinieerd door middel van transfiniete inductie op ξ.

De verzamelingenleer geïnduceerd door de vorige axioma's wordt de Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer genoemd en genoteerd als 'ZF'. Door middel van deze axioma's kunnen we de meeste wiskundige objecten, zoals verzamelingen, getallen, functies... definiëren. Meestal wordt aan 'ZF' nog een axioma toegevoegd, het beroemde Keuze-axioma.

- *Keuze (Choice)*: $\forall X \exists Y \forall x (x \in X \wedge x \neq \emptyset \to \exists z (Y \cap x = \{z\}))$.

Het Keuze-axioma zegt dat men voor elke verzameling X, we uit al haar elementen één element kan kiezen en deze kan samen stoppen in een nieuwe verzameling Y. Indien we aan ZF het Keuze-axioma toevoegen spreekt men van de Zermelo-Fraenkel verzamelingenleer met het Keuze-axioma, wat wordt afgekort tot 'ZFC'. Het is algemeen bekend dat in ZFC het Keuze-axioma equivalent is met de Goede-Ordeningsstelling die zegt dat er voor elke verzameling een goede ordening $\prec$ op die verzameling bestaat.

[2]De transitieve sluiting van x wordt als volgt gedefinieerd: $\mathrm{tc}(x) = x \cup (\bigcup x) \cup (\bigcup\bigcup x) \cup \ldots$.

[3]Zie Definitie 1.2.7

Bijlage C

Een niet-standaard model van de analyse

In deze bijlage geven we een niet-standaard model van de analyse. Hierbij laten we sommige details achterwege. Voor een uitgebreidere uiteenzetting verwijzen we naar de literatuur, bijvoorbeeld [5].
Het is belangrijk om te zeggen dat de constructie van een niet-standaard model van de analyse altijd gevormd wordt in de theorie ZFC. Een niet-standaard model zit dus vervat in een gefixeerd ZFC-universum.

C.1 Constructie van de bovenbouw

Voor een verzameling X_0 definiëren we recursief:

- Een object van rang 0 is een element van X_0.
- Een object van rang 1 is een verzameling van elementen van rang 0.
- Een object van rang 2 is een verzameling van elementen van rang kleiner dan 2 dat nog niet eerder gedefinieerd is (met andere woorden, dat geen object van rang kleiner dan 2 is).
- ...

In het algemeen is een object van rang $n \geq 1$ een verzameling van elementen van rang kleiner dan n dat geen object van rang kleiner dan n is (met andere woorden, dat een object van rang $n-1$ als element bevat).

C.1.1 Definitie. De unie van alle zo gedefinieerde objecten noemen we de **bovenbouw** $\widehat{X_0}$ van X_0. Een object a in $\widehat{X_0}$ met $\text{rang}(a) \geq 1$ noemen we een **entiteit** van $\widehat{X_0}$.

Met de (in een verzameling-theoretische opbouw van de wiskunde onvermijdelijke) identificaties van relaties, functies en koppels met verzamelingen bevat $\widehat{\mathbb{R}}$ zowat alle objecten uit de klassieke analyse.

In principe kan men $\widehat{X_0}$ ook op een andere manier zien. Definieer

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^0(X_0) &:= X_0, \\ \mathcal{P}^1(X_0) &:= \mathcal{P}(X_0) \cup X_0, \\ \mathcal{P}^{n+1}(X_0) &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(X_0)) \cup \mathcal{P}^n(X_0). \end{aligned}$$

$\widehat{X_0}$ is dan ook gelijk aan $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^i(X_0)$.

C.2 De taal $\mathcal{L}_0$ en $\mathcal{L}_0$-formules

$\mathcal{L}_0$ is de taal die bestaat uit twee relatiesymbolen, ook predicaatconstanten genoemd, namelijk de binaire relatiesymbolen $=$ ('is gelijk aan') en $\in$ ('is element van'). De $\mathcal{L}_0$-termen worden zoals in Bijlage A gedefinieerd (de enige $\mathcal{L}_0$-termen zijn variabelen).
De $\mathcal{L}_0$-formules worden zoals in Bijlage A gedefinieerd, met als verschil dat de kwantoren niet onbegrensd mogen zijn. Met andere woorden in plaats van $\exists x\phi$ moet er $(\exists x \in t)\phi$ staan, met t een $\mathcal{L}_0$-term waarin x niet voorkomt. Analoog voor $\forall x$ dat wordt vervangen door $(\forall x \in t)\phi$.

C.2.1 Definitie. Een uitspraak in $\mathcal{L}_0$ over $\widehat{X}$ is een formule waarin elke *vrije* veranderlijke vervangen is door een element van $\widehat{X}$.

C.3 Een niet-standaard model

We nemen aan dat $\mathbb{R}$ een verzameling van atomen is. Hierbij gebruiken we een uitbreiding van de theorie ZFC waarin een verzameling $\mathbb{A}$ (van willekeurig grote kardinaliteit) van elementloze objecten (verschillend van $\emptyset$) voorhanden is, die **atomen** worden genoemd. (Zie [5] voor verdere informatie.) We vermelden niet hoe een model van niet-standaard analyse wordt ontwikkeld, maar wel de axioma's waar zo'n model aan moet voldoen.

${}^*\mathbb{R}$ is een verzameling van atomen die voldoet aan de volgende axioma's:

1. (Overdrachtprincipe:) Er bestaat een afbeelding ${}^* : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{{}^*\mathbb{R}}$ die $\mathbb{R}$ op ${}^*\mathbb{R}$ afbeeldt en die voldoet aan de volgende eigenschap. Zij $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ een formule van $\mathcal{L}_0$ waarin $x_1, \ldots, x_n$ als enige vrije veranderlijken optreden. Zij $a_1, \ldots, a_n$ objecten van $\widehat{\mathbb{R}}$. We noteren met $\Phi(a_1, \ldots, a_n)$ de uitspraak bekomen door in Φ de vrije optredens van x_j door a_j te vervangen ($j = 1, \ldots, n$). Dan geldt:

$$\Phi(a_1, \ldots, a_n) \text{ is waar } \Leftrightarrow \Phi({}^*a_1, \ldots, {}^*a_n) \text{ is waar.}$$

2. ($^*\mathbb{R}$ is niet-standaard:) $\{^*x \mid x \in \mathbb{R}\} \neq {}^*\mathbb{R}$.

De afbeelding * is een morfisme van alle eigenschappen die in $\mathcal{L}_0$ uitgedrukt kunnen worden. Men noemt het beeld van $\widehat{\mathbb{R}}$ onder * een **niet-standaard model** van de analyse. In de cursus Infinitesimale analyse (zie [5]) wordt aangetoond dat deze axioma's relatief consistent zijn ten opzichte van de gewone verzamelingenleer van Zermelo-Fraenkel met het keuze-axioma (ZFC) door een model van de axioma's te construeren (naar Robinson, 1961). Belangrijk hierbij is dat de kwantoren in $\mathcal{L}_0$ begrensd zijn, dat wil zeggen dat $\exists$ en $\forall$ slechts in de combinatie $\exists x \in t$ of $\forall x \in t$ voorkomen. Men kan aantonen dat er geen niet-standaard model bestaat indien we aannemen dat het Overdrachtsprincipe ook geldt voor alle, ook onbegrensde, formules.

De constructies van de bovenbouwen $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{^*\mathbb{R}}$ gebeuren in een gefixeerd ZFC-universum. Een aantal axioma's van ZFC geldt dus in $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{^*\mathbb{R}}$, maar niet allemaal. Bijvoorbeeld het axioma 'Oneindig' is niet geldig. Dit wordt algemeen bewezen in de volgende stelling. (Merk op dat $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{^*\mathbb{R}}$ transitieve verzamelingen zijn.) De stelling maakt gebruik van het feit dat $\mathbb{R}$ en $^*\mathbb{R}$ verzamelingen van atomen zijn, zodat alle verzamelingen in $\widehat{\mathbb{R}}$ en $\widehat{^*\mathbb{R}}$ eindige rang hebben. Bovendien is deze stelling geldig, zoals modeltheoretisch altijd het geval is, in een gefixeerde ZFC-universum.

C.3.1 Stelling. *Zij A en B twee transitieve verzamelingen. Stel dat het axioma Oneindig geldt in $(A, \in)$. Dan bestaat er geen niet-triviale inbedding $* : A \to B$ die aan het Overdrachtsprincipe voldoet.*

Bewijs. Voor een bewijs verwijzen we naar de literatuur, bijvoorbeeld [2]. $\square$

Deze stelling geeft een reden waarom men de bovenbouw op $\mathbb{R}$ en $^*\mathbb{R}$ construeert voor verzamelingen tot aan de eindige rang. Indien we verder op de ladder van ordinalen gaan bij de constructie van een bovenbouw, volgt uit bovenstaande stelling dat er geen niet-triviale niet-standaard modellen bestaan.

C.3.2 Stelling. ** is een injectieve afbeelding die het 'type' van de objecten behoudt, dat wil zeggen:*

1. *De verzameling van atomen van $\mathbb{R}$ wordt afgebeeld op de verzameling van atomen $^*\mathbb{R}$.*

2. *Als $A \in \widehat{\mathbb{R}}$, dan is $^*(\mathcal{P}(A)) \subseteq \mathcal{P}(^*A)$.*

3. *Als $A_1, \ldots, A_n \in \widehat{\mathbb{R}}$ verzamelingen zijn, dan is $^*(A_1 \times \cdots \times A_n) = {}^*A_1 \times \cdots \times {}^*A_n$.*

4. *Als $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$ verzamelingen zijn, dan is $^*(\{f \mid f$ is functie van A naar $B\}) \subseteq \{f \mid f$ is functie van $^*A$ naar $^*B\}$.*

5. *Als $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ en $a \in A$, dan is $^*a \in {}^*A$.*

6. *Als $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$ verzamelingen zijn, dan is $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$.*

Bewijs. Voor een bewijs verwijzen we naar de literatuur, bijvoorbeeld [5]. □

C.3.3 Definitie. Een element $A \in \widehat{{}^*\mathbb{R}}$ wordt **standaard** genoemd indien er een $B \in \widehat{\mathbb{R}}$ bestaat zodat $A = {}^*B$. Een element $A \in \widehat{{}^*\mathbb{R}}$ wordt **intern** genoemd indien er een $B \in \widehat{\mathbb{R}}$ bestaat zodat $A \in {}^*B$. Een element $A \in \widehat{{}^*\mathbb{R}}$ wordt **extern** genoemd indien het niet intern is.

We zien dat een verzameling A intern is als en slechts als er een standaard verzameling bestaat die A bevat als element.

Omdat $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$ verzamelingen van atomen zijn, identificeert men voor $x \in \mathbb{R}$ gewoonlijk x met ${}^*x$. Met deze identificatie is $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$. Indien f een functie is van A naar B met $A, B \in \widehat{\mathbb{R}}$, dan is ${}^*f$ een functie van ${}^*A$ naar ${}^*B$. ${}^*f$ is dus een functie op de interne verzamelingen ${}^*A$ en ${}^*B$. ${}^*f$ is een uitbreiding van f, indien f een functie is tussen atomen: f is een functie op $\widehat{\mathbb{R}}$, zodat, na toepassing van de afbeelding *, f ook kan gezien worden als een functie in $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ werkend op die atomen. Door het Overdrachtsprincipe werkt ${}^*f$ op dezelfde manier op deze atomen. Omdat ${}^*f$ een uitbreiding is van f noteren we ${}^*f$ ook als f.[1]
Analoog voor de relatiesymbool R: indien R een relatiesymbool is tussen atomen, is ${}^*R$ een uitbreiding van R (op de atomen), zodat we ${}^*R$ ook noteren als R. ${}^*R$ is een relatie op interne verzamelingen.

C.3.4 Stelling. $({}^*\mathbb{R}, +, ., \leq)$ *is een totaal geordend veld.*

C.3.5 Definitie. $x \in {}^*\mathbb{R}$ wordt **infinitesimaal** (of **oneindig klein**) genoemd als $|x| \leq \frac{1}{n}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. $x \in {}^*\mathbb{R}$ wordt **eindig** genoemd als $|x| \leq n$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$. $x \in {}^*\mathbb{R}$ wordt **oneindig groot** genoemd als x niet eindig is.

C.3.6 Definitie. Stel $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Dan liggen x en y **oneindig dicht** bij elkaar als $x - y$ infinitesimaal is. We noteren dit als $x \approx y$. We noteren $m(x) := \{y \in {}^*\mathbb{R} \mid y \approx x\}$. We noteren $\mathbb{O}({}^*\mathbb{R})$ als de verzameling van alle eindige elementen van ${}^*\mathbb{R}$.

C.3.7 Stelling. *Voor elke $x \in \mathbb{O}({}^*\mathbb{R})$ bestaat er een unieke $y \in \mathbb{R}$ zodat $x \approx y$. y wordt het **standaarddeel** $st(x)$ genoemd.*

C.3.8 Stelling. $m(0) \neq \{0\}$ *en* ${}^*\mathbb{R} \backslash \mathbb{O}({}^*\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Op deze manier wordt analyse met infinitesimalen wiskundig gefundeerd. Door het overdrachtsprincipe kunnen hiermee stellingen over de gewone analyse bewezen worden. Vermits de gewone analyse verreikt wordt met nieuwe elementen, zijn de bewijzen minstens even eenvoudig als die in de gewone analyse. Het punt is dat bewijzen over $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ intuïtiever zijn dan bewijzen over $\widehat{\mathbb{R}}$. We geven een voorbeeld van een karakterisering van een begrip uit de gewone analyse door middel van infinitesimalen.

[1] Net zoals we de uitbreiding van bijvoorbeeld de sinusfunctie van reële getallen naar de complexe getallen op dezelfde manier noteren.

C.3.9 Stelling. *Zij f een afbeelding van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$. Dan is f continu in a als en slechts als $f(x) \approx f(a)$ voor elke $x \approx a$.*

Het principe van natuurlijke overloop is een belangrijk niet-standaard methode die gebruikt wordt in bewijzen.

C.3.10 Definitie. De elementen van ${}^*\mathbb{N}$ noemen we **hypernatuurlijke getallen**. De elementen van ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ noemen we **oneindig**. De elementen van $\mathbb{N}$ noemen we **eindig**.

C.3.11 Stelling. *Zij A een interne deelverzameling van ${}^*\mathbb{N}$.*

1. *Als A alle natuurlijke getallen bevat, dan reikt A aan de rechterkant tot in de oneindige natuurlijke getallen, met andere woorden: als $\mathbb{N} \subseteq A$, dan bestaat er een oneindig hypernatuurlijk getal ω waarvoor $\{1, 2, \ldots, \omega\} \subseteq A$* ***(Overloop in het oneindige)***

2. *Als A alle oneindige hypernatuurlijke getallen bevat, dan reikt A aan de linkerkant tot in de natuurlijke getallen, met andere woorden: als ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \subseteq A$, dan bestaat er een natuurlijk getal m waarvoor $\{n \in {}^*\mathbb{N} \mid n \geq m\} \subseteq A$* ***(Overloop in het eindige)***

C.4 κ-saturatie

De Saturatie-eigenschap is, naast het Overdrachtsprincipe, één van de belangrijkste eigenschappen van de niet-standaard analyse. Verzamelingtheoretisch gezien kan het uitgedrukt worden door middel van een doorsnede-eigenschap. Men kan aantonen dat voor elk oneindig kardinaalgetal κ, een niet-standaard model $\widehat{{}^*\mathbb{R}}$ bestaat dat κ-groot gesatureerd is.

κ-grootte Saturatie: voor elke $\cap$-gesloten verzameling X van niet-ledige interne verzamelingen met de kardinaliteit van $X \leq \kappa$, geldt dat $\bigcap X \neq \emptyset$.

κ-grootte Saturatie is nodig in sommige niet-standaard modellen. Bijvoorbeeld voor een karakterisering van compacte topologische ruimten in infinitesimale analyse (zie [5]). Het nadeel is dat voor verschillende wiskundige problemen één niet-standaard model niet genoeg is. Soms hebben we dus verscheidene, meestal anders gesatureerde, modellen nodig. Er bestaat geen globaal niet-standaard model van de analyse die alles omvat.

Er bestaat een equivalente formulering van κ-grootte Saturatie, maar eerst hebben we een definitie nodig.

C.4.1 Definitie. Een verzameling X voldoet aan de **eindige doorsnede eigenschap** (afgekort in het Engels met f.i.p.) als $\bigcap X' \neq \emptyset$ voor elke eindige $X' \subseteq X$.

κ-Saturatie: Voor elke verzameling X van niet-ledige interne verzamelingen met de eindige doorsnede eigenschap en met kardinaliteit Kard$X \leq \kappa$, geldt dat $\bigcap X \neq \emptyset$.

Elke verzameling X van niet-interne verzamelingen met de eindige doorsnede eigenschap kan omgezet worden in een $\cap$-gesloten verzameling X' van dezelfde kardinaliteit:

$$X' = \{\bigcap a \mid a \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)\}$$

In ZFC geldt voor elke oneindige verzameling dat de kardinalitiet van X gelijk is aan de kardinaliteit van $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ (zie [10]), zodat de kardinaliteit van X' maximaal de kardinaliteit van X is.

Bijlage D

Ordinalen in ZFC

Deze bijlage is een korte beschrijving van ordinalen in ZFC. Deze eigenschappen en definities zijn ook geldig in HST, wegens Stelling 1.3.11. Veel definities zullen erg lijken op de definities in HST. Voor een verdere uiteenzetting verwijzen we naar de literatuur.

D.0.2 Definitie. Een verzameling X wordt **transitief** genoemd als voor elke $x \in X$ geldt dat $x \subseteq X$.

D.0.3 Definitie. Een binaire relatie $\prec$ op een verzameling X wordt **goed-gefundeerd** genoemd als elke niet-ledige verzameling $Y \subseteq X$ een $\prec$-minimaal element bevat.

D.0.4 Definitie. Een relatie $\prec$ wordt een **(strikte) orderelatie** genoemd op X indien de relatie niet-symmetrisch en transitief is. Niet-symmetrisch wil zeggen dat er geen elementen x en y in X bestaan zodat $x \prec y$ en $y \prec x$. Hieruit volgt dat er geen element x in X bestaat zodat $x \prec x$. Transitief wil zeggen dat voor elke drie elementen x, y en z in X geldt dat $x \prec z$ indien $x \prec y$ en $y \prec z$.

D.0.5 Definitie. Een orderelatie op X wordt **lineair of totaal** genoemd indien voor elke twee verschillende elementen x en y van X geldt dat ofwel $x \prec y$ ofwel $y \prec x$

D.0.6 Definitie. Een verzameling X wordt **goed-geordend** genoemd met betrekking tot $\prec$ indien $\prec$ een lineaire orderelatie is op X en $\prec$ goed-gefundeerd is op X.

D.0.7 Definitie. Een **ordinaal** is een transitieve verzameling goed-geordend door $\in$. Een **kardinaal** is een ordinaal dat niet bijectief is met een kleiner ordinaal, m.a.w. een beginordinaal. Ord, respectievelijk Kard, zijn de verzamelingen van de ordinalen, respectievelijk de kardinalen.

D.0.8 Definitie. Een **opvolgersordinaal** is een ordinaal x waarvoor een ordinaal y bestaat zodat $x = y \cup \{y\}$. $y \cup \{y\}$ wordt ook genoteerd als $y + 1$. Een **limietordinaal** is een niet-nul ordinaal dat geen opvolgersordinaal is.

Indien we dezelfde definitie nemen voor de natuurlijke getallen als in HST (zie Definitie 1.1.16), kan men aantonen dat $\mathbb{N}$ een ordinaal is, meer zelfs: het is het kleinste limietordinaal.

We geven een lijst met enkele belangrijke eigenschappen. De relatie $\in$ op Ord wordt ook genoteerd als $<$.

D.0.9 Stelling.

1. *Ord is geen verzameling in ZFC.*
2. *$<$ is een lineaire relatie op Ord.*
3. *Elke niet-ledige verzameling $C \subseteq$ Ord heeft een $<$-minimaal element.*
4. *Voor elke $\alpha \in$ Ord, is $\{\xi \in \mathit{Ord} \mid \xi < \alpha\} = \alpha$ een verzameling.*
5. *Voor elke verzameling $A \subseteq$ Ord, bestaat een $\gamma \in$ Ord, zodanig dat voor alle a in A geldt dat $a < \gamma$.*

Transfiniete inductie is een belangrijke eigenschap van ordinalen in ZFC.

D.0.10 Stelling (Transfiniete inductie)**.** *Zij $\phi(x)$ een eigenschap zodanig dat*

1. *$\phi(0)$ geldt,*
2. *$\phi(\kappa)$ geldt, zodra $\phi(\xi)$ geldt voor alle $\xi < \kappa$.*

Dan geldt $\phi(\eta)$ voor alle ordinalen η.

Een equivalente vorm is de volgende.

D.0.11 Stelling. *Zij $\phi(x)$ een eigenschap zodanig dat*

1. *$\phi(0)$ geldt,*
2. *voor elk limietordinaalgetal κ, $\phi(\kappa)$ geldt, zodra $\phi(\xi)$ geldt voor alle $\xi < \kappa$,*
3. *$\phi(\xi + 1)$ geldt, zodra $\phi(\xi)$ geldt voor elk ordinaalgetal ξ.*

Dan geldt $\phi(\eta)$ voor alle ordinalen η.

Bibliografie

[1] C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory, 3rd ed.*, North Holland, Amsterdam, 1992, pp. xiv + 650.

[2] M. Di Nasso, *On the Foundations of Nonstandard Mathematics*, online verkrijgbaar, Mathematica Japonica, vol. 50, n.1 (1999), pp. 131-160.

[3] K. Hrbaček, *Axiomatic foundations for nonstandard analysis*, Fundamenta Mathematicae, vol 98 (1978), pp.1-19.

[4] K. Hrbaček, T. Jech, *Introduction to set theory*, 3rd ed., New York, 1999.

[5] C. Impens, H. Vernaeve, *Infinitesimale Analyse*, Gent, Academiejaar 2010-2011.

[6] T. Jech, *Set Theory*, third edition, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[7] V. Kanovei, *A course on Foundations of Nonstandard Analysis*, Institute for Studies in Theoretical Physics and Mathematics (IPM), Tehran, 1994.

[8] V. Kanovei, M. Reeken, *Mathematics in a Nonstandard World*, Mathematica Japonica vol. 45, n.2 (1997), pp. 369-408.

[9] V. Kanovei, M. Reeken, *Nonstandard Analysis Axiomatically*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[10] I. Moerdijk, J. van Oosten, *Sets, Models and Proofs*, Utrecht University, 2000 (revised 2009).